Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 8

Docente: Prof. Pietro Caputo
Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

4 Maggio 2017

Esercizio 1 Sia Z una variabile aleatoria normale. Mostra che per ogni $x > 0$ valgono le seguenti uguaglianze:

1. $\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(Z < -x)$;
2. $\mathbb{P}(|Z| > x) = 2\mathbb{P}(Z > x)$;
3. $\mathbb{P}(|Z| < x) = 2P(Z < x) - 1$.

Esercizio 2 Sia X una normale di media $\mu = 5$ e varianza σ^2. Calcola σ sapendo che

$$\mathbb{P}(X > 9) = 0.2.$$

Esercizio 3 Sia S_n il numero di successi che si realizzano in n prove indipendenti, in ognuna delle quali il successo ha probabilità p, e sia $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Trova $a \in \mathbb{R}$ tale che, per n grande, la disuguaglianza $|S_n^*| > a$ ha probabilità vicina a $\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 (Es. 5 a pag. 194 del Feller)
Trova il valore di k tale che la probabilità che il numero di teste ottenute in 1000 lanci di una moneta sia compreso tra 490 e k sia pari a $0,5$.

Esercizio 5 La ruota di una roulette ha 38 spazi, numerati 0, 00 e da 1 a 36. Scommettendo su un numero specifico, se la pallina della roulette si ferma sul numero scelto si vince 35, altrimenti si perde 1. Effettuando delle scommesse consecutive, qual è la probabilità che il capitale:

(i) sia maggiore di quello iniziale dopo 34 scommesse;

(ii) sia maggiore di quello iniziale dopo 100 000 scommesse;

(iii) sia uguale a quello iniziale dopo 972 scommesse.

Esercizio 6 (Es. 26 a pag. 240 del Ross)
Una ditta produce due tipi di monete: una moneta equa e una truccata che dà testa nel 55% dei casi. Possediamo una di queste monete, ma non sappiamo di che tipo essa sia. Per capirlo, effettuiamo il seguente test statistico: lanciamo la moneta 1000 volte. Se la moneta dà testa al massimo 525 volte, concludiamo che si tratta di una moneta equa. Se la moneta è effettivamente equa, qual è la probabilità di giungere alla conclusione errata? Quale sarebbe il risultato se la moneta fosse truccata?

Esercizio 7 (Es. 31 a pag. 241 del Ross)

(a) La caserma dei pompieri si trova su una strada lunga A, con $A < \infty$. Se gli incendi si distribuiscono uniformemente su $(0, A)$, dove deve trovarsi la caserma affinchè sia minima la distanza attesa dall'incendio? Cioè, determinare a per minimizzare $\mathbb{E}[\,|X - a|\,]$, dove X è uniformemente distribuita su $(0, A)$.

(b) Supponiamo ora che la strada abbia una lunghezza infinita - dall'origine 0 all'infinito. Se la distanza di un incendio dall'origine è distribuita esponenzialmente con parametro λ, in quale punto dovrebbe ora trovarsi la caserma dei pompieri? Cioè, determinare a per minimizzare $\mathbb{E}[\,|X-a|\,]$, dove X è esponenziale di parametro λ.

Esercizio 8 (Es. 7.5 a pag. 340 del Caravenna - Dai Pra)
Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30000 firme, quante persone è necessario interpellare affinchè la soglia delle 30000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno 0.95?

Esercizio 9* Sia W una variabile aleatoria con funzione di densità data dalla *legge semicircolare di Wigner*

$$\sigma(x) := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)$$

Calcola tutti i momenti $m_k := \mathbb{E}(W^k)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ di W.
(N.B.: verso la fine della risoluzione dell'esercizio dovresti rincontrare una tua vecchia conoscenza...)