Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 7

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

27 Aprile 2017

Esercizio 1 Sia $Y \sim U(0,5)$. Calcola la probabilità che le radici dell'equazione $4x^2+4xY+Y+2$ siano reali.

Esercizio 2 (Es. 32 a pag. 241 del Ross)
Il tempo (in ore) richiesto per riparare un macchinario è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Calcola:

(i) la probabilità che la riparazione duri più di 2 ore;

(ii) la probabilità condizionata che la riparazione duri più di 10 ore sapendo che la sua durata supera le 9 ore.

Esercizio 3 (Es. 8 a pag. 239 del Ross)
Il tempo di vita in ore di un'apparecchiatura elettronica è una variabile aleatoria la cui densità è data da

$$f(x) = xe^{-x} \qquad x \geq 0.$$

Calcolare il valore atteso del tempo di vita dell'apparecchiatura.

Esercizio 4 (Es. 4 del quarto appello 2010)
L'intensità del traffico lungo un tratto di autostrada è misurata da un parametro $N \in \{0,1,2,\ldots\}$, e Mario stima che il tempo (in minuti) necessario a percorrere il tratto è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = e^{-N}$. Tuttavia, il parametro N è esso stesso soggetto a incertezza, e la società che gestisce il tratto di autostrada segnala agli automobilisti che N si può considerare con buona approssimazione distribuito come una variabile di Poisson con media 1. Quanto tempo impiegherà in media Mario a percorrere il tratto?

Esercizio 5 (Es. 19 a pag. 248 del Ross con un punto in più)
Le prove riguardanti l'innocenza o la colpevolezza di un imputato in una inchiesta criminale si possono riassumere con il valore di una variabile aleatoria esponenziale X, la cui media μ dipende dalla effettiva colpevolezza dell'imputato: $\mu = 1$ se è innocente, $\mu = 2$ se è colpevole. La giuria giudica poi l'imputato colpevole se $X > c$ per un valore opportuno di c.

(i) Quale deve essere il valore di c se la giuria vuole essere certa al 95% di non condannate un innocente?

(ii) Utilizzando il valore di c trovato nel punto (i), qual è la probabilità che un imputato colpevole sia condannato?

(iii) Analisi statistiche suggeriscono che circa la metà delle persone processate abbiano effettivamente commesso il reato. Utilizzando sempre lo stesso valore di c, qual è il valore atteso del numero di volte in cui la giuria sbaglia il verdetto (condanna un innocente o assolve un colpevole) su 10 sentenze?

Esercizio 6 (Es. 6.18 a pag. 305 del Caravenna - Dai Pra)
Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $U(0,2)$ e sia $Y_n := \min\{X_1,\dots,X_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $T \sim Geo(p)$ una variabile aleatoria indipendente dalle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si ponga $Z := Y_T$, cioè $Z(\omega) := Y_{T(\omega)}(\omega)$. Si determini la funzione di ripartizione di Z, mostrando che è una variabile aleatoria assolutamente continua.
Suggerimento: si determini innanzitutto $\mathbb{P}(Z \le x, T = n)$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 7 Un bastoncino viene spezzato casualmente in due.

(a) Qual è il valore atteso della lunghezza del pezzo più corto?

(b) Qual è il valore atteso del rapporto tra la lunghezza del pezzo più corto e la lunghezza del pezzo più lungo.

Esercizio 8 (Es. 6.26 a pag. 307 del Caravenna - Dai Pra)
Un lanciatore di giavellotto esegue $n \in \mathbb{N}$ lanci. Detta X_i la distanza ottenuta nell'i-esimo lancio, supponiamo che $X_1,\dots,X_n$ siano variabili aleatorie i.i.d. con $X_n \sim Exp(\lambda)$, dove $\lambda \in (0,\infty)$. Indichiamo con M_n la massima distanza a cui è stato lanciato il giavellotto.

(i) Sia $W_n := \dfrac{M_n}{log(n)}$ e F_{W_n} la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } x = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

(ii) Si deduca che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{M_n}{\log(n)} - \frac{1}{\lambda} \right| > \epsilon \right) = 0.$$

(iii) Definiamo ora $Z_n := M_n - \dfrac{1}{\lambda}\log n$, e sia $F_{Z_n}(t)$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che il limite $F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)$ esiste, e lo si determini, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che F è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria assolutamente continua.

Esercizio 9* Quanto deve essere spessa una moneta affinchè, lanciandola, la probabilità che atterri e rimanga dritta sul bordo sia pari a $\frac{1}{3}$?
Può essere utile tenere presente il seguente fatto di geometria: tagliando una sfera con due piani paralleli ed equidistanti dal centro della sfera, l'area della superficie sferica compresa tra i due piani è proporzionale alla distanza fra essi.