

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 6

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

20 Aprile 2017

X è una **variabile aleatoria (assolutamente) continua** se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tale che $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ per ogni $-\infty < a \leq b < \infty$.

La funzione f è detta **densità di probabilità continua** di X .

La **funzione di distribuzione** di X è $F_X(y) = F(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$.

Proprietà:

- $\mathbb{P}(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
- per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$;
- $F(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx = \mathbb{P}(X < y)$.

Esercizio 1 Determina quali tra le seguenti funzioni sono densità di probabilità:

(a) $f_1(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(b) $f_2(x) = e^{-3x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}(x)$

(c) $f_3(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

(d) $f_4(x) = e^{|x|}$

Esercizio 2 Determina la costante C , se esiste, affinché le seguenti funzioni siano delle densità di probabilità:

(i) $g_1(x) = x(C - x^2) \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$;

(ii) $g_2(x) = C \sin x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$;

(iii) $g_3(x) = Cx^{-(\lambda+1)} \mathbb{1}_{\{x > r\}}(x)$, con $\lambda, r > 0$;

(iv) $g_4(x) = C^n x^n e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Esercizio 3 (Es. 2 a pag. 245 del Ross) Per qualche costante c , la variabile aleatoria X ha la densità

$$f(x) = \begin{cases} cx^n & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare c e $\mathbb{P}(X > y)$, $0 < y < 1$.

Esercizio 4 (Es. 1 a pag. 238 del Ross) Sia X una variabile aleatoria la cui densità è

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Qual è il valore di c ?
- (b) Qual è la funzione di distribuzione di X ?

Esercizio 5 (Es. 2 a pag. 238 del Ross) Un sistema può funzionare per un tempo aleatorio X . Se la densità di X (in mesi) è

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

qual è la probabilità che il sistema funzioni per almeno 5 mesi?

Esercizio 6 (Es. 5 a pag. 238 del Ross) Un benzinaio è rifornito di gasolio una volta la settimana. Se la sua vendita settimanale in migliaia di litri è una variabile aleatoria con densità

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quale deve essere la capacità del serbatoio affinché la probabilità che il gasolio sia esaurito in una settimana sia pari a 0.01?

Esercizio 7 (Es. 4 a pag. 238 del Ross) La densità di X , il tempo di vita di una data apparecchiatura elettronica (misurata in ore), è data

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

- (a) Determinare $\mathbb{P}(X > 20)$.
- (b) Qual è la funzione di distribuzione di X ?
- (c) Qual è la probabilità che su 6 apparecchiature di questo tipo almeno 3 funzionino per almeno 15 ore?

Esercizio 8* Ti vengono date due scatole chiuse le quali contengono premi in denaro che possono essere due numeri reali positivi qualsiasi. Ti viene detto di aprire una delle due scatole a tua scelta e di leggere il valore del premio al suo interno. A questo punto tu puoi scegliere se tenere il premio oppure prendere quello dell'altra scatola, che però potrai aprire solo dopo aver preso la tua decisione. A priori, sembrerebbe che la probabilità di scegliere la scatola con il premio maggiore sia $1/2$ indipendentemente dal valore letto nella prima scatola e dalla decisione presa, non avendo alcuna informazione su come siano stati scelti i valori dei premi. Eppure esiste una strategia che ti permette di scegliere la scatola con il premio più grande con probabilità $> 1/2$ (sì, strettamente maggiore!)...

Esercizio 9* Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Interpreta l'integrale

$$\int_0^1 u^n (1-u)^m du$$

come la probabilità di un evento e calcolalo usando soltanto la combinatoria.

Suggerimento: supponi di lanciare $n + m + 1$ volte una freccetta sull'intervallo $[0, 1]$ e supponi di prendere un punteggio corrispondente al numero che becchi. Considera il punteggio più alto che fai nei primi n lanci e il punteggio più basso che fai nei successivi m . Ti rimane ancora un lancio...