Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 5 - Preparazione al primo esonero

Docente: Prof. Pietro Caputo
Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

6 Aprile 2017

Esercizio 1 (Es. 19 a pag. 183 del Ross)
Supponiamo che la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria X sia data da

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & b > 3.5 \end{cases}$$

Calcola la densità discreta $p(b)$ di X.

Esercizio 2 (Es. 2 del primo appello 2013)
Un mazzo di 52 carte francesi viene mischiato e successivamente diviso in 4 mazzi di 13 carte ciascuno. Calcola:

1. la probabilità che ogni mazzo contenga un asso;
2. la probabilità che ci siano esattamente due mazzi senza assi.

Esercizio 3 (Es. 5 del secondo appello 2010)
Sia N il numero di persone che votano in una data sezione elettorale. Assumiamo che N sia una variabile di Poisson di parametro $\lambda > 0$ e che ciascun elettore voti per il candidato A con probabilità $0 < p < 1$. Determina la distribuzione del numero N_A di voti raccolti dal candidato A nella data sezione elettorale. Calcola inoltre valore atteso e varianza di N_A.

Esercizio 4 (Es. 2 del terzo appello del 2010)
Disponiamo di 5 monete tali che lanciando l'i-esima moneta esce testa con probabilità $i/5$. Scegliamo a caso una moneta da lanciare. Calcola il valore atteso e la varianza del numero di teste in 10 lanci indipendenti della moneta scelta.

Esercizio 5 (Es. 1 del primo appello del 2010)
Una scatola contiene 100 dadi, 30 dei quali hanno un difetto: la faccia numero 2 ha probabilità 1/9, mentre la faccia numero 5 ha probabilità 2/9 (tutte le altre facce hanno probabilità 1/6). Un dado viene preso dalla scatola e lanciato ripetutamente. Sapendo che il primo 2 appare al secondo lancio, calcola la probabilità che il dado sia difettoso.

Esercizio 6 (Es. 1.36 a pag. 65 del Caravenna-Dai Pra)
Alessandro e Beatrice si incontrano per una gara di scacchi. Decidono di fare due partite, assegnando un punto in caso di vittoria, zero punti in caso di sconfitta e mezzo punto in caso di pareggio. Nel caso in cui dopo le due partite i giocatori abbiano lo stesso punteggio, lanceranno una moneta equilibrata per determinare il vincitore della gara.
Alessandro sa giocare con due diversi approcci, uno offensivo e uno difensivo, mentre Beatrice

gioca sempre in maniera offensiva. Se Alessandro gioca in maniera offensiva, vince con probabilità $p \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - p$. Se invece gioca in maniera difensiva, pareggia con probabilità $q \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - q$.
Alessandro decide di giocare con la seguente strategia. Gioca la prima partita in maniera offensiva. Se perde, gioca anche la seconda partita in maniera offensiva, mentre se vince gioca la seconda partita in maniera difensiva.

1. Calcola, in termini di p e q, la probabilità p_* che Alessandro vinca la gara.

2. Assumendo che $q = 0.9$, determina per quali valori di p si ha che $p_* > \dfrac{1}{2}$. Può succedere che Beatrice sia la giocatrice più forte (nel senso che ha maggiore probabilità di vincere una singola partita rispetto ad Alessandro) e ciononostante Alessandro abbia maggiore probabilità di vincere la gara?

Esercizio 7 (Es. 2 del primo esonero 2013)
Un indice finanziario segue un andamento aleatorio tale che ogni giorno, indipendentemente, il valore dell'indice

- aumenta di 0.5 con probabilità $\frac{1}{2}$;
- diminuisce di 0.2 con probabilità $\frac{1}{4}$;
- diminuisce di 0.5 con probabilità $\frac{1}{4}$.

Se il valore iniziale è 0, calcola:

1. il valore atteso dell'indice dopo 20 giorni;

2. la probabilità di avere un valore pari a -0.2 dopo 3 giorni.

Esercizio 8 (Es. 3 del primo esonero 2011)
n persone vanno a cena. Diciamo che la cena è *k-bilanciata* se in ogni sottoinsieme di k persone tra le n ci sono almeno due persone che si conoscono tra loro e almeno due persone che non si conoscono tra loro. Si sa che non è possibile organizzare una cena tra 6 persone che sia 3-bilanciata. Usando il metodo probabilistico, dimostra che invece è possibile organizzare una cena tra 6 persone che sia 4-bilanciata.

Esercizio 9 (Es. 5 del primo esonero 2012)
Un quadrato di lato m viene diviso in m^2 quadratini di lato 1. Supponiamo che ogni quadratino sia colorato di rosso indipendentemente dagli altri con probabilità $1/m^2$. Calcola la probabilità che l'area colorata di rosso sia maggiore di 1, nel limite $m \longrightarrow \infty$.

Esercizio 10 (Es. 4 del terzo appello del 2010)
Siano X e Y due v.a. geometriche indipendenti di parametri $p_X = 1/2$ e $p_Y = 1/4$. Determina la probabilità dell'evento $X \geq Y$.

Esercizio 11 Da un'urna contenente 8 palline nere e 6 palline bianche si eseguono due estrazioni senza reinserimento. Ad ogni estrazione corrisponde la vincita di un euro se la pallina estratta è nera, o alla perdita di un euro se è bianca. Sia X il numero aleatorio che quantifica la vincita.

1. Determina l'insieme Range(X) dei valori possibili di X e la sua densità discreta.

2. Calcola la media e la varianza di X.