Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 4

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

30 Marzo 2017

Esercizio 1

(i) Esprimi $\mathbb{P}(X \geq a)$ in funzione della funzione di distribuzione di X.

(ii) Se X ha funzione di distribuzione F_X, qual è la funzione di distribuzione di e^X?

(iii) Se X ha funzione di distribuzione F_X e $a, b \in \mathbb{R}$, qual è la funzione di distribuzione di $aX + b$?

Esercizio 2 Sia X il numero di lanci necessari di un dado per ottenere la prima faccia pari e sia Y il numero di lanci necessari per ottenere la prima faccia maggiore di 3. Calcola:

(i) $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$;

(ii) $\mathbb{P}(X > 2)$;

(iii) $\mathbb{P}(X > 2 | Y = 2)$;

(iv) $\mathbb{P}(X = Y)$.

Esercizio 3 (Es. 3 del III appello del 2011) Siano $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ due passeggiate aleatorie indipendenti su $\mathbb{Z}$ che partono insieme nell'origine. $\{X_n\}$ si sposta di $+1$ con probabilità $\frac{2}{3}$ e di -1 con probabilità $\frac{1}{3}$, $\{Y_n\}$ si sposta di $+1$ con probabilità $\frac{1}{2}$ e di -1 con probabilità $\frac{1}{2}$.
Calcola, al variare di n, $\mathbb{E}[X_n - Y_n]$ e $\mathrm{Var}[X_n - Y_n]$.

Esercizio 4 (Es. 4 del I esonero del 2012) A ogni unità di tempo indipendentemente Alice lancia un dado e Bob tira una moneta. Sia T_A il tempo in cui Alice ottiene 6 per la prima volta e sia T_B il tempo in cui Bob ottiene testa per la seconda volta. Calcola:

(i) $\mathbb{E}(T_A)$ e $\mathbb{E}(T_B)$;

(ii) $\mathbb{P}(T_A = T_B)$.

Esercizio 5 Il signor M. Bruno ha una grave dipendenza dal gioco d'azzardo e gioca tutto il giorno alla roulette (dove possono uscire 38 numeri con uguale probabilità, e se esce il numero su cui si è puntato si vince 36 volte il valore che si è scommesso), puntando a ogni giocata 1€ sempre sullo stesso numero, il numero 17. Per provare a curarlo, il suo grande amico Davide scommette sempre 20€ con lui che, alla fine delle successive 36 giocate, M. sarà in passivo.
Chi dei due sta ottenendo i maggiori benefici (finanziari) dalla "cura"?

Esercizio 6 (Tratto da una triste storia vera) Un famoso ex-studente di questo dipartimento colleziona monete da un centesimo e ne ha accumulate circa 3000 in un grande boccale di birra. Qualche tempo fa uscì la notizia che la Zecca aveva per errore stampato e messo in circolazione circa 7000 monete da un centesimo con sopra raffigurata l'effigie della moneta da due centesimi. Il valore di tali rarissime monete fu stimato a circa 2500€ l'una. Sapendo che all'epoca dei fatti vi erano in circolazione nell'UE circa 32 miliardi di monete da un centesimo, calcola:

1. il valore atteso del valore in euro del boccale di birra;
2. la probabilità che (come poi purtroppo accadde...) il leggendario studente, controllando tutte le sue monete ad una ad una, non trovasse nessuna di quelle rare.

Esercizio 7 Allo scopo di esercitare un controllo sulla popolazione, il governo cinese vietò a ogni coppia di generare più di un figlio. Con la speranza di avere un figlio maschio, molte coppie contadine arrivarono a uccidere le neonate femmine. A seguito di questi fatti il governo cinese modificò la legge, vietando a ogni coppia di procreare dopo la nascita del primo figlio maschio. Supponendo che la probabilità che nasca un maschio o una femmina sia la stessa e che nessuna coppia generi più di 10 figli,

(i) determina se nella prossima generazione la popolazione sarà aumentata o diminuita (cioè se il numero di figli sarà maggiore o minore del numero dei genitori);

(ii) determina se tra i figli saranno di più i maschi o le femmine.

Esercizio 8 Chuck-a-Luck è un gioco d'azzardo in cui si lanciano 3 dadi. Il giocatore punta su un numero compreso tra 1 e 6. Se il numero su cui ha puntato appare su uno, due o tre dei dadi egli vince rispettivamente una, due o tre volte la sua puntata e riprende i soldi scommessi, altrimenti perde i soldi scommessi. Si può puntare anche su diversi numeri contemporaneamente. Se il giocatore punta sempre su tutti e sei i numeri scommettendo 1€ su ciascuno di essi, quanti soldi si aspetta di perdere giocando 36 volte?

Esercizio 9* Sia $G = (V, E)$ un grafo con n vertici e $d \cdot n$ lati ($d \geq 1$ è la *densità* del grafo) e sia $\widetilde{V}_p$ un sottoinsieme aleatorio di V tale che ciascun vertice di V sta in $\widetilde{V}_p$ con probabilità p. Consideriamo le due variabili aleatorie

$$X_p \coloneqq \#\{\text{vertici in } \widetilde{V}_p\}, \; Y_p \coloneqq \#\{\text{lati del sottografo di } G \text{ indotto da } \widetilde{V}_p\}.$$

(Un sottografo indotto *da un sottoinsieme U dell'insieme dei vertici V è il grafo che ha come insieme dei vertici U e come insieme dei lati il sottoinsieme L dell'insieme dei lati E che contiene tutti e soli i lati che hanno per estremi due vertici di U.)*

1. Calcola $\max\limits_{0 \leq p \leq 1} \mathbb{E}[X_p - Y_p]$.
2. Usando il punto precedente e un ragionamento simile a quello visto a lezione per le cene k-bilanciate, dimostra la seguente *forma debole del Teorema di Turán*: preso comunque un gruppo di n persone in cui vi sono esattamente $d \cdot n$ coppie di persone che si conoscono reciprocamente ($d \geq 1$), ci sono sempre almeno $\frac{n}{4d}$ persone che non si conoscono tra di loro.