Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 3

Docente: Prof. Pietro Caputo
Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

23 Marzo 2017

Esercizio 1 Sia Ω uno spazio campionario e supponiamo che $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ sia una probabilità su Ω, cioè:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\forall E, F \subseteq \Omega$ tali che $E \cap F = \emptyset$ si ha che $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$.

Dimostra che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Esercizio 2 Un'urna contiene una palla nera, una bianca e una rossa. Viene estratta a caso una palla: se essa è nera viene reinserita, se è rossa viene tolta dall'urna, se è bianca viene reinserita insieme ad un'altra bianca.
Qual è la probabilità di pescare una palla rossa alla seconda estrazione?

Esercizio 3 Una moneta viene lanciata tre volte. Calcola la probabilità che a tutti e tre i lanci esca testa, sapendo che:

(i) al primo lancio esce testa;

(ii) ai primi due lanci esce testa;

(iii) esce testa due volte.

Esercizio 4 Consideriamo 10 monete che verificano la seguente condizione: per $i = 1, \dots, 10$, lanciando la moneta i-esima esce testa con probabilità $\frac{i}{10}$. Scegliamo una moneta a caso tra queste e la lanciamo: esce testa.
Calcola la probabilità che la moneta lanciata sia l'i-esima.

Esercizio 5 Due fabbriche A e B producono radio. Ogni radio prodotta dalla fabbrica A è difettosa con probabilità 0.05, mentre ogni radio prodotta dalla fabbrica B è difettosa con probabilità 0.01. Supponiamo di aver acquistato due radio prodotte dalla stessa fabbrica, che può essere con uguale probabilità A o B.
Se la prima radio testata è difettosa, qual è la probabilità che lo sia anche l'altra?

Esercizio 6 Due giocatori L e N lanciano a turno una moneta. Il primo che colleziona una testa vince.
Calcola la probabilità che vinca L, sapendo che è lui il primo a lanciare.

Esercizio 7 (es. 1.29 a pag. 63 del Caravenna-Dai Pra) Il Ministero della Pubblica istruzione vuole stimare la frazione $\alpha \in (0,1)$ degli studenti di terza media che hanno una preparazione scarsa in matematica. A tal fine, sottopone a un grande numero di studenti un quesito con dieci possibili risposte, di cui una sola è corretta. Assumiamo che gli sudenti con una buona preparazione in matematica rispondano correttamente al quesito, mentre quelli con preparazione scarsa diano una risposta scelta a caso. Sottoponendo ad un'analisi più approfondita gli studenti che hanno risposto correttamente al quesito, si scopre che tra questi solo l'80% ha una buona preparazione in matematica.
Sulla base di queste informazioni, determina α.

Esercizio 8 (es. 1.43 a pag. 66 del Caravenna-Dai Pra) Viene indetto un referendum in una popolazione di n individui. Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, e voterà "sì" con probabilità $\frac{1}{2}$.

(a) Qual è la probabilità che il numero di voti "sì" sia k, per $k = 0, \dots, n$?

(b) Assumendo che i voti "sì" siano k, dimostra che la probabilità che i votanti totali siano m, con $m \in \{k, \dots, n\}$, è pari a $\binom{n-k}{m-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$.

Esercizio 9* Consideriamo la *funzione zeta di Riemann* $\zeta(s) := \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m^s}$.

Sia $\Omega = \mathbb{N}$ e definiamo su Ω la probabilità $\mathbb{P}$ definita sui singoletti mediante $\mathbb{P}(\{n\}) := \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s}$.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $M_k := \{k, 2k, 3k, \dots\} = k\mathbb{N}$ l'insieme dei multipli di k.

1. Mostra che $\mathbb{P}(M_k) = \frac{1}{k^s}$.
2. Mostra che se p_1, p_2, $\dots p_l$ sono primi distinti, allora
$$\mathbb{P}(M_{p_1} \cap M_{p_2} \cap \dots \cap M_{p_l}) = \ = \mathbb{P}(M_{p_1}) \cdot \mathbb{P}(M_{p_2}) \cdots \mathbb{P}(M_{p_l}).$$
3. Deduci che $\mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \dots \cap M_{p_l}^c) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$.
4. Dando per buono che
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \dots \cap M_{p_n}^c) = \mathbb{P}(\bigcap_{p \text{ primo}} M_p^c)$$
(cioè possiamo *portare il limite dentro la probabilità*), mostra che vale la *formula del prodotto di Eulero*: per ogni $s \in (1, \infty)$,
$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$