Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 2

Docente: Prof. Pietro Caputo
Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

Esercizio 1 Siano A e B due eventi tali che $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A^c) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.
Quanto vale $\mathbb{P}(A \cup B)$?

Esercizio 2 Elena sta giocando una partita di poker all'italiana (cioè con tutte e 52 le carte). Calcola la probabiltà che Elena:

1. Riceva un full (tris + coppia) servito;
2. Riceva un poker servito;
3. Faccia poker sapendo che le era stata servita una coppia e aveva scartato le altre tre carte per pescarne di nuove.

Esercizio 3 (es. 1.27 (i) a pagg. 62-63 del Caravenna-Dai Pra)
Una compagnia di assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra a fronte di un danno subito dal cliente. La compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: basso rischio, medio rischio e alto rischio. Dei suoi assicurati, il 75% sono a basso rischio, il 20% a medio rischio e il restante 5% ad alto rischio.
Si sa che gli assicurati a basso rischio hanno una probabilità del 2% di subire un danno che preveda il pagamento dell'assicurazione, mentre tale probabilità è del 10% per gli assicurati a medio rischio e del 20% per quelli ad alto rischio.
Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso reclami il pagamento dell'assicurazione?

Esercizio 4 Per verificare la qualità di un bene prodotto in serie, si sottopone a prove un campione tratto da una partita di esemplari del bene in oggetto, e si verifica il numero di esemplari difettosi.
In questo contesto, supponi che la partita sia costituita da $n = 10000$ pezzi di cui $m = 150$ difettosi, e che il campione esaminato sia di $k = 100$ pezzi.
Calcola la probabilità che il campione contenga r pezzi difettosi.

Esercizio 5 Una giuria è composta da tre giudici, ciascuno dei quali decide il suo verdetto ("innocente" o "colpevole") senza confrontarsi con gli altri, e alla fine la giuria si pronuncia con il verdetto espresso dalla maggioranza dei giudici: di questi, due hanno una probabilità p di prendere la giusta decisione, mentre il terzo lancia una moneta equa per prendere la sua decisione. Un'altra giuria è composta da un solo giudice che ha probabilità p di prendere la giusta decisione.
Quale delle due giurie ha la maggior probabilità di esprimere il giusto verdetto?

Esercizio 6 (esercizio 21 a pag. 56 del Feller) In una cittadina di $n+1$ abitanti, una persona dice un pettegolezzo a una seconda, la quale lo ripete a una terza, e così via. A ogni passo, chi riceve il pettegolezzo lo comunica a una a caso delle altre n persone. Calcola la probabilità che il pettegolezzo venga comunicato r volte...

1. ...senza ritornare all'abitante che per primo ha sparso la voce;
2. ...senza essere ripetuto due volte alla stessa persona.

Ripeti i primi due punti supponendo che ad ogni passo una persona che abbia ricevuto il pettegolezzo lo spifferi pubblicamente a un gruppetto di N persone.

Esercizio 7 Samuel Pepys scrisse a Newton per chiedergli se sia più probabile che una persona ottenga:

- almeno 1 sei lanciando 6 dadi;
- almeno 2 sei lanciando 12 dadi;
- almeno 3 sei lanciando 18 dadi.

Qual è la risposta esatta? (Ricordati che ai tempi di Newton non c'erano le calcolatrici, ma soprattutto che all'esame non ti sarà consentito usarne una...)

Esercizio 8 Tre carcerati, Alex, Bob e Colin, hanno fatto domanda per la libertà condizionata. La Commissione per la Libertà Condizionata ha deciso di concederla solo a due di essi, e loro lo sanno, ma non sanno chi dei tre sia stato scelto dalla Commissione. Alex chiede a una guardia con cui ha fatto amicizia di rivelargli se lui è uno dei due destinati al rilascio. La guardia gli risponde "Purtroppo non sono autorizzato a rivelartelo. Però posso dirti il nome di uno degli altri due che so che sta per essere liberato." A ciò, Alex risponde "No, grazie, allora preferisco non sapere niente". Il suo ragionamento è il seguente: a priori, la probabilità che sia uno dei due che stanno per essere rilasciati è $\frac{2}{3}$. Ma se la guardia gli rivelasse, ad esempio, che Bob è uno di loro, allora rimarrebbero lui e Colin in bilico, e poichè non ci sarebbe alcuna ragione per cui uno dei due dovrebbe avere una maggiore chance rispetto all'altro, la sua probabilità di essere liberato scenderebbe a $\frac{1}{2}$ (!)
Il ragionamento di Alex è corretto? Perchè?

Esercizio 9* Un cassetto contiene calzini rossi e neri spaiati. Sappiamo che se prendiamo a caso due calzini dal cassetto, la probabilità che entrambi siano rossi è $\frac{1}{2}$. Qual è il minimo numero di calzini che il cassetto deve contenere? Qual è il minimo numero di calzini che il cassetto deve contenere se sappiamo anche che il numero di calzini neri è pari?