Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Tutorato 11 - Preparazione al secondo esonero

Docente: Prof. Pietro Caputo

Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

25 Maggio 2017

Esercizio 1 (Es. 4 del secondo esonero 2012)
Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti tali che $X_i = -1, 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$ rispettivamente, e sia $S_n \coloneqq \sum_{i=1}^n X_i$. Fornisci un'espressione per i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}S_n \geq 0.1\right)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \geq 0.1\right)$.

Esercizio 2 (Es. 3 del primo appello 2010)
Siano X, Y, Z tre variabili di Poisson indipendenti di parametri $1, 2, 3$ rispettivamente. Calcola

(a) $\mathbb{P}(X + Y + Z = 6)$;

(b) $\mathrm{Cov}(X + 2Y, 2Y + 3Z)$;

(c) $\mathbb{E}[XYZ]$;

(d) $\mathbb{E}[X^2Y^2Z]$.

Esercizio 3 (Es. 4 del terzo appello 2013)
Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato di lato 2 centrato nell'origine del piano e sia $\mathcal{R}$ il rettangolo con base 2 e altezza 1 centrato nell'origine. Siano $P_1, \ldots, P_n$ punti indipendenti scelti uniformemente a caso in $\mathcal{Q}$.

(a) Calcola la probabilità che P_1 appartenga a $\mathcal{R}$;

(b) Fornisci un'espressione in termini di $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ per la probabilità che il punto $\bar{P}_n \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n}}(P_1 + \ldots + P_n)$[1] appartenga a $\mathcal{R}$ nel limite $n \to \infty$.

Esercizio 4 (Es. 5 del quarto appello 2013)
Siano X_1, X_2, X_3 tre variabili normali indipendenti di parametri $\mu_1 = \mu_2 = 2\mu_3 = 1$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ e sia $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, esprimi la probabilità $\mathbb{P}(2X_1 + X_2 - 2X_3 \leq x)$ in termini della funzione Φ.
2. Calcola la varianza $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + 2X_3)$.
3. Calcola la covarianza $\mathrm{Cov}(X_1 - 2X_3, 2X_2 + X_3)$.

Esercizio 5 Siano T_1, T_2, T_3 i primi tre tempi di arrivo di un processo di Poisson di intensità μ e sia N_t il numero di arrivi al tempo t.

(a) Calcola le covarianze $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$, $\mathrm{Cov}(T_1, T_3)$ e $\mathrm{Cov}(T_2, T_3)$.

(b) Calcola $\mathbb{P}(T_1 > 4 | T_2 \leq 8 \leq T_3)$.

[1] Con $P_1 + \ldots + P_n$ si intende la somma vettoriale di n vettori con due componenti ciascuno.

(c) Calcola $\mathbb{P}(N_1 = 0, N_4 = 1, N_8 = 2)$.

Esercizio 6 (Es. 5 del quarto appello 2011)
Un dado viene lanciato ripetutamente. Sia T_1 il numero di lanci necessari per ottenere 6 la prima volta e sia T_2 il numero di lanci necessari per ottenere 6 la seconda volta. Calcola

(a) la probabilità congiunta $\mathbb{P}(T_1 = j, T_2 = k)$ per ogni $j, k = 1, 2, \ldots$;

(b) il valore atteso di T_2.

Esercizio 7 Può esistere una variabile aleatoria X tale che la sua funzione generatrice dei momenti sia $M_X(t) = \dfrac{e^{-t}}{t+2}$?

Esercizio 8 (Es. 6 del terzo appello 2010)
Siano $Z_1, \ldots, Z_n$ variabili esponenziali indipendenti di parametro 2, e sia $X_n := \sum_{i=1}^n Z_i$.

(a) Fornisci un valore approssimato (per n grande) della probabilità dell'evento $\{X_n \geq n/2\}$.

(b) Determina la densità di probabilità di X_n, per ogni n.

Esercizio 9 (Es. 4 del secondo esonero 2013)
Il telefono di Lucia riceve telefonate secondo un processo di Poisson, con una media di due telefonate al giorno. Sia $N(k)$ il numero di chiamate ricevute dopo k giorni.

(a) Per ogni k fissato, usando la disuguaglianza di Markov, dai una stima della probabilità dell'evento $N(k) \geq 3k$.

(b) Stima la stessa probabilità del punto (a), usando questa volta la disuguaglianza di Chebyshev.

(c) Utilizzando il teorema del limite centrale, calcola il limite per $k \to \infty$ della probabilità dell'evento $N(k) \geq 2k + 3\sqrt{k}$ in termini della funzione $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$.

Esercizio 10 (Es. 3 del primo appello 2012)
Sia S_n la passeggiata aleatoria in cui a ogni passo si va a destra con probabilità 2/3 e a sinistra con probabilità 1/3. Calcola:

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{1}{2}n\right)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{1}{3}n\right| \leq n^{3/4}\right)$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{1}{3}n\right| \leq n^{1/4}\right)$.

Esercizio 11 (Es. 5 del primo appello 2013 + transizione di fase)
Sia $A(n)$ la matrice aleatoria $n \times n$ i cui elementi $A_{i,j}(n)$ sono variabili esponenziali di parametro 1 indipendenti. Calcola, nel limite $n \to \infty$:

(a) il valore atteso del minimo $\min_{i,j} A_{i,j}(n)$;

(b) la probabilità che il massimo $\max_{i,j} A_{i,j}(n)$ sia maggiore di $2 \log n$;

(c) la probabilità che esista almeno una riga i tale che $\max_j A_{i,j}(n) < \log 2$.

- Usando il punto (c), dimostra che ha luogo la seguente *transizione di fase*:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n} A_{i,j}(n) < (1-\epsilon)\log n\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \text{ ma}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\min_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n} A_{i,j}(n) < \log n\right) = 1.$$