CP110 - Probabilità 1

Tutorato 10

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

18 Maggio 2017

Esercizio 1 (Es. 6 del primo appello 2011, primi due punti)

Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y} & y \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Dire se X e Y sono indipendenti.
2. Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[Y - X]$.

Esercizio 2 (Es. 6.29 a pag. 309 del Caravenna - Dai Pra)

Un segnale viene trasmesso in un istante aleatorio X . Il ricevitore viene acceso in un istante aleatorio Y e resta acceso per un intervallo di tempo aleatorio Z . Supponendo che X, Y e Z siano variabili aleatorie indipendenti con $X \sim U(0, 2)$ e $Y, Z \sim U(0, 1)$, qual è la probabilità che il segnale venga ricevuto?

Esercizio 3 (Es. 5 del terzo appello 2011)

Siano X, Y due variabili aleatorie binomiali indipendenti con medesimi parametri n e p .

Per ogni $m \in \{0, \dots, 2n\}$, determina la densità di probabilità discreta della X condizionata all'evento $X + Y = m$.

Esercizio 4 Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti tali che $X, Y \sim \text{Be}(\frac{1}{2})$. Determina la densità di $Z := X + Y$ e $W := |X - Y|$. Z e W sono indipendenti?

Esercizio 5 (Es. 6.21 a pag. 306 del Caravenna - Dai Pra)

L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. I tempi di attesa T_1 e T_2 per parlare con l'operatore sono, per entrambi i numeri, variabili aleatorie esponenziali, con media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che risponderà per primo.

- (i) Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?
- (ii) Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Esercizio 6 (Es. 4 del primo appello 2011)

Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Sia Y_n la variabile aleatoria

$$Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- (a) Si determini il valor medio e la varianza di Y_n in funzione di n .

- (b) Si dimostri che la variabile $T_n = nY_n$ converge in distribuzione a una variabile esponenziale di parametro 1, ossia che per ogni $t > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) \rightarrow 1 - e^{-t}.$$

Esercizio 7 (Es. 3 del secondo esonero 2012)

Due ciclisti A, B fanno una corsa. In un tempo $t > 0$, A percorre $X(t)$ metri e B percorre $Y(t)$ metri. Supponiamo che $X(t), Y(t)$ siano variabili normali indipendenti con media $\mu = t$ e varianza $\sigma^2 = t$. Calcolare in funzione di t il valore atteso della distanza $|X(t) - Y(t)|$ tra i due corridori.

Esercizio 8 (Es. 6.15 a pag. 304 del Caravenna - Dai Pra)

Siano X, Y v.a. indipendenti, entrambe con distribuzione $\text{Exp}(1)$, e sia $Z := X - Y$.

1. Dimostra che Z è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}.$$

Suggerimento: poni $Y' = -Y$.

2. Dimostra che $|Z| \sim \text{Exp}(1)$.

Esercizio 9

1. Siano $X_1, \dots, X_n$ normali standard. Scrivi la densità della variabile aleatoria $Z := \sum_{i=1}^n X_i^2$.
(una variabile aleatoria Z siffatta viene detta variabile χ^2 con n gradi di libertà).
2. Deduci dal punto 1 il valore di $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, e quindi di $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ per ogni n dispari.
- 3.* Un missile deve colpire un bersaglio situato in $(0, 0, 0)$. Il missile viene puntato verso $(0, 0, 0)$, ma i militari sanno che a causa delle condizioni esterne (vento, ecc..) ogni coordinata sarà falsata di un errore distribuito come una normale standard. Il missile sarà tuttavia in grado di distruggere il bersaglio se esploderà ad una distanza ≤ 2 da esso. Qual è la probabilità che il missile riesca a distruggere il bersaglio?