Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

# CP110 - Probabilità 1

## Soluzioni Tutorato 9

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

**Esercizio 1**

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{+\infty} cye^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^2 \left[-e^{-xy}\right]_0^{+\infty}\mathrm{d}y = c\int_0^2 \mathrm{d}y = 2c,$$

quindi $c = \frac{1}{2}$ e $f(x,y) = \frac{1}{2}ye^{-xy}\mathbb{1}_{[0,\infty)\times[0,2]}(x,y)$. Le densità marginali di $X$ e $Y$ sono

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^2 ye^{-xy}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\left(\left[-\frac{ye^{-xy}}{x}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-xy}}{x}\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\left(-\frac{2}{x}e^{-2x} + \left[-\frac{e^{-xy}}{x^2}\right]_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}e^{-2x} + \frac{1-e^{-2x}}{x^2}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} ye^{-xy}\mathbb{1}_{[0,2]}(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y\left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_0^{+\infty}\mathbb{1}_{[0,2]}(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(y).$$

**Esercizio 2**

1.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 cx(1-x)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^1 y\mathrm{d}y\cdot\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = c\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

quindi $c = 12$ e $f(x,y) = 12x(1-x)y\,\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$. Per calcolare i valori attesi e le varianze ci servono le densità marginali.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 12x(1-x)y\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}y = 12x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 y\mathrm{d}y =$$

$$= 12x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\frac{1}{2} = 6x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x);$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 12x(1-x)y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\mathrm{d}x = 12y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = 2y\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Quindi

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)\mathrm{d}x = 6\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2f_X(x)\mathrm{d}x = 6\int_0^1 x^3(1-x)\mathrm{d}x = \frac{6}{20} \Longrightarrow \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{20},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} yf_Y(y)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y^2\mathrm{d}y = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2f_Y(y)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2 = \frac{1}{18}.$$

2. $f(x,y) = cy\mathbb{1}_{[0,y]\times[0,1]}(x,y)$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^y cy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^1 y^2\mathrm{d}y = \frac{c}{3},$$

quindi $c = 3$ e $f(x,y) = 3y\mathbb{1}_{[0,y]\times[0,1]}(x,y)$. Per calcolare i valori attesi e le varianze ci servono le densità marginali.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 3y\mathbb{1}_{[0,y]\times[0,1]}(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 3y\mathbb{1}_{[0,1]\times[x,1]}(x,y)\mathrm{d}y =$$

$$= 3\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_x^1 y\mathrm{d}y = 3\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 = \frac{3}{2}(1-x^2)\mathbb{1}_{[0,1]}(x);$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 3y\mathbb{1}_{[0,y]\times[0,1]}(x,y)\mathrm{d}x = 3y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\int_0^y \mathrm{d}x = 3y\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Quindi

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{3}{8},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \Longrightarrow \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 = \frac{19}{320},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} yf_Y(y)\mathrm{d}y = 3\int_0^1 y^3\mathrm{d}y = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y = 3\int_0^1 y^4\mathrm{d}y = \frac{3}{5} \Longrightarrow \mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2 = \frac{3}{80}.$$

3.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} ce^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = c\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4}}\mathrm{d}y =$$

$$= c\sqrt{\pi}\sqrt{4\pi} = 2c\pi,$$

quindi $c = \frac{1}{2\pi}$ e $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}$. Le densità marginali di $X$ e $Y$ sono

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}e^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Quindi $X \sim N(0,1)$ (da cui $\mathbb{E}[X] = 0$ e $\mathrm{Var}[X] = 1$) e $Y \sim N(0,2)$ (da cui $\mathbb{E}[Y] = 0$ e $\mathrm{Var}[Y] = 2$).

**Esercizio 3**

(a) Se le righe (prima colonna) sono i valori che può assumere $X_1$ e le colonne (prima riga) quelli che può assumere $X_2$, abbiamo

senza reinserimento:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{14}{39}$ | $\frac{10}{39}$ |
| 1 | $\frac{10}{39}$ | $\frac{5}{39}$ |

con reinserimento:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{64}{169}$ | $\frac{40}{169}$ |
| 1 | $\frac{40}{169}$ | $\frac{25}{169}$ |

(b) Se le righe (prima colonna) sono i valori che può assumere il vettore $(X_1, X_2)$ e le colonne (prima riga) quelli che può assumere $X_3$, abbiamo

senza reinserimento:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| (0,0) | $\frac{28}{143}$ | $\frac{70}{429}$ |
| (0,1) | $\frac{70}{429}$ | $\frac{40}{429}$ |
| (1,0) | $\frac{70}{429}$ | $\frac{40}{429}$ |
| (1,1) | $\frac{40}{429}$ | $\frac{5}{143}$ |

con reinserimento:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| (0,0) | $\frac{512}{2197}$ | $\frac{320}{2197}$ |
| (0,1) | $\frac{320}{2197}$ | $\frac{200}{2197}$ |
| (1,0) | $\frac{320}{2197}$ | $\frac{200}{2197}$ |
| (1,1) | $\frac{200}{2197}$ | $\frac{125}{2197}$ |

**Esercizio 4** Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esame2_2013.pdf`.

**Esercizio 5**

1. Le densità marginali di $X$ e $Y$ sono tra loro uguali perchè la densità congiunta è una funzione simmetrica in $X$ e $Y$: $\forall x, y \in [0, \infty)$, $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y,X}(y, x)$. Di conseguenza gli integrali fatti rispetto alle due variabili coincidono.

2. Integriamo, ad esempio, rispetto alla $y$. Effettuando la sostituzione $u = 1+x+y, \mathrm{d}u = \mathrm{d}y$, otteniamo:
$$f_X(x) = f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{(1+x+y)^{\alpha+2}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{u^{\alpha+2}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[x+1,\infty)}(u)\mathrm{d}u = \alpha(\alpha+1)\int_{x+1}^{\infty} u^{-(\alpha+2)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\mathrm{d}u =$$
$$= \alpha(\alpha+1)\frac{u^{-(\alpha+1)}}{-(\alpha+1)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\Big|_{u=x+1}^{\infty} = \alpha(x+1)^{-(\alpha+1)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$
Quindi se $t \geq 0$
$$F_X(t) = F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(x+1)^{-(\alpha+1)}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{t} \alpha(x+1)^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}x =$$
$$= -(x+1)^{-\alpha}\Big|_{0}^{t} = \left(1 - \frac{1}{(1+t)^{\alpha}}\right),$$
mentre se $t < 0$, $F_Y(t) = 0$. Dunque $F_X(t) = F_Y(t) = \left(1 - \frac{1}{(1+t)^{\alpha}}\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$.

**Esercizio 6**

1. Se le righe (prima colonna) sono i valori che può assumere $X$ e le colonne (prima riga) quelli che può assumere $Y$, abbiamo

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

(Si ottengono le varie probabilità nella tabella svolgendo conti del tipo $\mathbb{P}(X=3, Y=4) = \mathbb{P}(X=3|Y=4)\mathbb{P}(Y=4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{36} = \frac{2}{36}$.)

2. Se le righe (prima colonna) sono i valori che può assumere $X$ e le colonne (prima riga) quelli che può assumere $Y$, abbiamo

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 2 | 0 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{4}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{6}{36}$ |

3. Se le righe (prima colonna) sono i valori che può assumere $X$ e le colonne (prima riga) quelli che può assumere $Y$, abbiamo

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ |

**Esercizio 7** Il tempo di primo successo su prove indipendenti con probabilità di successo $p$ è una geometrica di parametro $p$, $X_1$. Notiamo che il numero di prove tra il primo e il secondo successo è ancora una geometrica di parametro $p$, che chiamiamo $X_2$, ed è indipendente da $X_1$ (proprietà di perdita della memoria della geometrica). Quindi la densità congiunta sarà semplicemente il prodotto delle densità individuali:

$$p_{X_1,X_2}(i,j) = \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j) = p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-1} = p^2(1-p)^{i+j-2}$$

per ogni $i, j \geq 1$.

**Esercizio 8** Sia $0 \leq X \leq n$ il numero aleatorio di cavie su cui l'aspirina fa effetto e sia $\bar{x}$ la percentuale della popolazione generale su cui l'aspirina fa effetto. Per il teorema di De Moivre-Laplace abbiamo che la probabilità di errore di tipo I per il nostro test statistico è

$$\mathbb{P}(X > m|\bar{x} = 0.6) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{m - 0.6n}{\sqrt{0.24n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{m - 0.6n}{\sqrt{0.24n}}\right) \quad Z \sim N(0,1)$$

e, analogamente, la probabilità di errore di tipo II è

$$\mathbb{P}(X < m|\bar{x} = 0.8) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{m - 0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right) = \Phi\left(\frac{m - 0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right) \quad Z \sim N(0,1)$$

Quindi, per avere le probabilità degli errori di tipo I e II entrambe minori di $0,1$ bisogna trovare $m, n$ tali che

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{m-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right) < 0.1 \\ \Phi\left(\frac{m-0.6n}{\sqrt{0.24n}}\right) > 0.9 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{m-0.8n}{\sqrt{0.16n}} < -1.28 \\ \frac{m-0.6n}{\sqrt{0.24n}} > 1.28 \end{cases}$$

cioè $0.6n + 1.28\sqrt{0.24n} < m < 0.8n - 1.28\sqrt{0.16n}$. Per far sì che esistano gli $n, m$ che ci interessano, basta quindi avere (per "lasciare spazio a $m$")

$$0.6n + 1.28\sqrt{0.24n} + 1 < 0.8n - 1.28\sqrt{0.16n} \Longrightarrow 0.2n - 1.28(\sqrt{0.24n} + \sqrt{0.16n})\sqrt{n} - 1 > 0.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo quindi

$$n > \left(\frac{1.139 + \sqrt{1.293 + 0.8}}{0.4}\right)^2 \simeq 41.787.$$

Quindi il minimo numero di cavie da prendere in modo da poter fissare una soglia per cui sia l'errore di tipo I che quello di tipo II siano $< 0.1$ è

$$n = \left\lceil \left(\frac{1.139 + \sqrt{1.293 + 0.8}}{0.4}\right)^2 \right\rceil = 42,$$

dove con $\lceil k \rceil$ si denota la *parte intera superiore* di $k$, ossia il più piccolo intero $h$ tale che $h \geq k$.

**Esercizio 9** La variabile aleatoria $Z$ che stiamo cercando é una variabile discreta a valori in $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Perciò, per descriverla, basta associare a ciascuno degli elementi $\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}$ la sua probabilità. Seguendo il suggerimento, assegniamo al vettore $\{0, 1\}$ probabilità 0. Per far sì che si verifichi la condizione sulle marginali, $Z$ deve soddisfare:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_Z(\{1, 0\}) + \mathbb{P}_Z(\{1, 1\}) = p \\ \mathbb{P}_Z(\{0, 1\}) + \mathbb{P}_Z(\{1, 1\}) = q \\ \mathbb{P}_Z(\{1, 0\}) + \mathbb{P}_Z(\{0, 1\}) + \mathbb{P}_Z(\{0, 0\}) + \mathbb{P}_Z(\{1, 1\}) = 1 \end{cases}$$

Applicando $\mathbb{P}_Z(X \leq Y) = 1$, cioè $\mathbb{P}_Z(\{1, 0\}) = 0$, otteniamo dal sistema che $\mathbb{P}_Z(\{1, 1\}) = p$, $\mathbb{P}_Z(\{0, 1\}) = q - p$ e $\mathbb{P}_Z(\{0, 0\}) = 1 - q - p$. Di fatto questa è l'unica variabile aleatoria tale da soddisfare entrambe le condizioni. Abbiamo che $\mathbb{P}_Z(X \neq Y) = q - p$. Notiamo, infine, che, prendendo una v.a. $\widetilde{Z}$ tale da soddisfare il sistema sopra, ma con $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}}(\{1, 0\}) = \epsilon > 0$, allora $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}}(X \neq Y) = q - p + \epsilon > \mathbb{P}_Z(\{0, 1\})$, quindi la $Z$ che abbiamo definito prima è l'accoppiamento ottimale.