Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 8

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO
TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1. Lavorando (solo) sugli estremi di integrazione, otteniamo
$$\mathbb{P}(Z > x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = -\int_{-x}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \mathbb{P}(Z < -x).$$
2. Sfruttando il punto (1), $\mathbb{P}(|Z| > x) = \mathbb{P}(Z > x) + \mathbb{P}(Z < -x) = 2\mathbb{P}(Z > x)$.
3. Sfruttando il punto (2),
$$\mathbb{P}(|Z| < x) = 1 - \mathbb{P}(|Z| > x) = 1 - 2\mathbb{P}(Z > x) = 1 - 2(1 - \mathbb{P}(Z < x)) =$$
$$= 1 - 2 + 2\mathbb{P}(Z < x) = 2\mathbb{P}(Z < x) - 1.$$

Esercizio 2
$$\mathbb{P}(N(5, \sigma^2) > 9) = 0.2 \Longrightarrow \mathbb{P}\left(N(0,1) > \frac{9-5}{\sigma}\right) = 0.2 \Longrightarrow \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = 0.8 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{4}{\sigma} \simeq 0.84 \Longrightarrow \sigma \simeq \frac{4}{0.84} \simeq 4.761.$$

Esercizio 3
$$\mathbb{P}(|S_n^*| > a) \simeq \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathbb{P}(-a < S_n^* < a) \simeq \frac{1}{2} \Longrightarrow \Phi(a) - \Phi(-a) \simeq \frac{1}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \Phi(a) \simeq \frac{3}{4} \Longrightarrow a \simeq 0.675.$$

Esercizio 4 Per il Teorema di De Moivre-Laplace, se T_{1000} è il numero di teste ottenute su 1000 lanci
$$\mathbb{P}(490 \leq T_{1000} \leq k) = 0.5 \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-10}{\sqrt{250}} \leq \frac{T_{1000} - 500}{\sqrt{250}} \leq \frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) = 0.5$$
$$\Longrightarrow \Phi\left(\frac{k-500}{\sqrt{250}}\right) - 1 + \Phi(0.63) = 0.5 \Longrightarrow \Phi\left(\frac{k}{15.8} - 31.6\right) \simeq 0.5 + 0.26 = 0.76$$
$$\Longrightarrow \frac{k}{15.8} - 31.6 \simeq 0.71 \Longrightarrow k \simeq (31.6 + 0.71) \cdot 15.8 \simeq 510.5$$

Esercizio 5 Sia $X_n \sim Bin\left(n, \frac{1}{38}\right)$ e sia $Z_n := \dfrac{X_n - \frac{n}{38}}{\frac{\sqrt{37n}}{38}}$. $Z_n \sim N(0,1)$. Consideriamo l'evento $A_n := \{$il capitale è maggiore di quello iniziale dopo n scommesse$\}$. Tale evento si verifica se e solo se vale la disuguaglianza $35X - (n - X) \cdot 1 \geq 0$, cioè se e solo se $X \geq \frac{n}{36}$.

(i) Chiamiamo per semplicità $X := X_{34}$, $Z := Z_{34}$ e $A := A_{34}$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{1 - \frac{34}{38}}{\frac{\sqrt{37\cdot 34}}{38}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{4}{\sqrt{37\cdot 34}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{37\cdot 34}}\right) \approx 1 - \Phi(0.112) \approx 1 - 0.544 = 0.456.$$

(ii) Chiamiamo per semplicità $X := X_{100000}$, $Z := Z_{100000}$ e $A := A_{100000}$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 2778) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{2778 - \frac{100000}{38}}{\frac{\sqrt{3700000}}{38}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{5564}{100\sqrt{370}}\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{5564}{100\sqrt{370}}\right) \approx 1 - \Phi(2.893) \approx 1 - 0.9981 = 0.0019.$$

(iii) Chiamiamo per semplicità $X := X_{972}$, $Z := Z_{972}$ e $A := A_{972}$. Consideriamo l'evento $B := \{$il capitale è uguale a quello iniziale dopo 972 scommesse$\}$.
Usando la correzione di continuità si ha

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X = 27) = \mathbb{P}\left(\frac{26.5 - \frac{972}{38}}{\frac{\sqrt{972\cdot 37}}{38}} \leq Z \leq \frac{27.5 - \frac{972}{38}}{\frac{\sqrt{972\cdot 37}}{38}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{35}{2\sqrt{243}} \leq Z \leq \frac{73}{2\sqrt{243}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{73}{2\sqrt{243}}\right) - \Phi\left(\frac{35}{2\sqrt{243}}\right) \approx \Phi(2.341) - \Phi(1.122) \approx 0.9904 - 0.544 = 0.4464.$$

Esercizio 6 Sia E l'evento $\{$la moneta è equa$\}$, T l'evento $\{$la moneta è truccata$\}$ e X il numero di lanci che danno testa. Allora

$$\mathbb{P}(X > 525|E) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 500}{\sqrt{250}} > \frac{525 - 500}{\sqrt{250}}\right) \simeq 1 - \Phi(1.581) \simeq 1 - 0.943 = 0.057.$$

Similmente,

$$\mathbb{P}(X \leq 525|T) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 550}{\sqrt{247.5}} \leq \frac{525 - 550}{\sqrt{247.5}}\right) \simeq 1 - \Phi(1.589) \simeq 1 - 0.9441 = 0.0559.$$

Esercizio 7

(a) $X \sim U(0, A)$ con $A < +\infty$.

$$\mathbb{E}[\,|X - a|\,] = \int_0^A |x - a|\frac{1}{A}\mathrm{d}x = \int_a^A (x - a)\frac{1}{A}\mathrm{d}x + \int_0^a (a - x)\frac{1}{A}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{A}\left(\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^A + \left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{A^2}{2} - aA + a^2\right) =: g(a).$$

Poichè $g'(a) = \dfrac{1}{A}(-A + 2a) = 0 \iff a = \dfrac{A}{2}$ e $g''(a) > 0$ per ogni a, la caserma deve trovarsi in $\dfrac{A}{2}$.

(b) $X \sim Exp(\lambda)$.

$$\mathbb{E}[\,|X-a|\,] = \int_0^{+\infty} |x-a|\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} (x-a)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x + \int_0^a (x-a)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x =$$

$$= \lambda\left(\int_a^{+\infty} xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x - \int_0^a xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x - a\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x + a\int_0^a e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right).$$

Integrando per parti si ha che $\int xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}$. Quindi

$$\mathbb{E}[\,|X-a|\,] = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_a^{+\infty} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_a^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_0^{a} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{a} + \frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_a^{+\infty} - \frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{a}\right) =$$

$$= \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda} + a =: g(a).$$

Poichè $g'(a) = -2e^{-\lambda a} + 1 = 0 \iff a = \frac{\log 2}{\lambda}$ e $g''(a) > 0$ per ogni a, la caserma deve trovarsi in $\frac{\log 2}{\lambda}$.

Esercizio 8 Sia $X \sim Bin\left(n, \frac{3}{5}\right)$ e sia $Z := \frac{X - \frac{3}{5}n}{\frac{1}{5}\sqrt{6n}}$. $Z \sim N(0,1)$.

$$\mathbb{P}(X \geq 30000) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{3000 - \frac{3}{5}n}{\frac{1}{5}\sqrt{6n}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\frac{3}{5}n - 3000}{\frac{1}{5}\sqrt{6n}}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{3}{5}n - 3000}{\frac{1}{5}\sqrt{6n}}\right)$$

Quindi $\mathbb{P}(X \geq 30000) = 0.95 = \Phi(1.645) \iff \frac{\frac{3}{5}n-3000}{\frac{1}{5}\sqrt{6n}} = 1.645$. Svolgendo i conti si ottiene l'equazione $600n - 329\sqrt{6}\sqrt{n} - 30000000 = 0$, che è soddisfatta (dimenticandoci per un attimo del fatto che n è un numero intero) da

$$\sqrt{n} = \frac{329\sqrt{6} + \sqrt{329^2 \cdot 6 + 24 \cdot 3000000000}}{1200} \approx 224.279, \text{ i.e. } n \approx 50301.237.$$

Quindi affinchè la soglia delle 30000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno 0.95 è necessario interpellare 50302 persone.

Esercizio 9* Dividiamo i casi k pari e k dispari. Abbiamo che per $k = 2n+1$ dispari, la funzione $x^k\sqrt{4-x^2}$ è una funzione dispari, che integrata su un intervallo simmetrico dà 0. Perciò, $m_{2n+1} = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vediamo ora il caso $k = 2n$ pari. Abbiamo che $m_0 = 1$, dato che m_0 coincide proprio con l'integrale della densità. Calcoliamo ora m_{2n} per ricorsione:

$$m_{2n} := \int_{-2}^{2} \frac{1}{2\pi}x^{2n}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

Applichiamo la sostituzione $\sin(t) = \frac{x}{2}$, $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\mathrm{d}t$:

$$m_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} x^{2n}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2^{2n+1}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\left(I_{2n} - I_{2n+2}\right)$$

con $I_{2n} \coloneqq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$. Calcoliamo ora a parte (e per parti) I_{2n} e I_{2n+2}:

$$I_{2n} \coloneqq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(t) \cdot \sin(t)\mathrm{d}t = -\sin^{2n-1}(t)\cdot\cos(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\sin^{2n-2}(t)(-\cos^2(t))\mathrm{d}t = (2n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

$$\implies \frac{2^{2n+1}}{\pi} I_{2n} = 4 \cdot \frac{2^{2n-1}}{\pi} I_{2n} = 4(2n-1)\, m_{2n-2}.$$

Analogamente, abbiamo che $\frac{2^{2n+1}}{\pi} I_{2n+2} = (2n+1)m_{2n}$, quindi

$$m_{2n} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}(I_{2n} - I_{2n+2}) = 4(2n-1)m_{2n-2} - (2n+1)m_{2n}$$

da cui otteniamo che $m_{2n} = \frac{4(2n-1)}{(2n+2)} m_{2n-2}$. Adesso applichiamo la ricorsione:

$$m_{2n} = \frac{4(2n-1)}{2(n+1)} m_{2n-2} = \frac{2(2n-1)\cdot 2(2n-3)}{(n+1)\cdot n} m_{2n-4} = \frac{2(2n-1)\cdot 2(2n-3)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)\cdot n\cdots 1} m_0 =$$

$$= \frac{2^n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{(n+1)(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 4\cdot 2\cdot n!} = \frac{2^n(2n-1)!}{(n+1)2^{n-1}(n-1)!\cdot n!} =$$

$$= \frac{2\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot 2\cdot n!\cdot n!} = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n} \coloneqq C_n$$

(Sì, sono proprio i numeri di Catalan! E la semicircolare di Wigner è una delle densità più importanti di tutta la probabilità contemporanea...)
`https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_di_Wigner`
Quindi concludiamo che

$$m_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ C_n \coloneqq \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n} & \text{se } k = 2n \text{ è pari} \end{cases}.$$