Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 7

Docente: Prof. Pietro Caputo
Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

Esercizio 1 Le radici dell'equazione $4x^2 + 4xY + Y + 2$ sono reali se e solo se il discriminante è non negativo.
$\Delta = 16Y^2 - 16Y - 32$, quindi $\Delta \geq 0 \iff Y^2 - Y - 2 \geq 0 \iff Y \leq -1$ oppure $Y \geq 2$.
Quindi, se $A := \{$le radici dell'equazione sono reali$\}$, poichè $Y \sim U(0,5)$, si ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Y \leq -1) + \mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(0 \leq Y < 2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 2 Sia $X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$.

(i) $\mathbb{P}(X > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-1}$.

(ii) Poichè le variabili aleatorie esponenziali sono prive di memoria,

$$\mathbb{P}(X > 10 | X > 9) = \mathbb{P}(X > 1) = e^{-\lambda} = e^{-1/2}.$$

Esercizio 3

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2 e^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2 e^{-x} \mathrm{d}x = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-x} \mathrm{d}x =$$

$$= 2\left[-xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x\right] = 2\Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 2.$$

Esercizio 4 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame4_250111.pdf`

Esercizio 5 Consideriamo gli eventi $A := \{$l'imputato è innocente$\}$ e $B := \{$l'imputato è colpevole$\}$.
Si ha $X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se vale } A \\ \frac{1}{2} & \text{se vale } B \end{cases}$.

(i) $\dfrac{95}{100} = \dfrac{19}{20} = \mathbb{P}(X \leq c | A) = 1 - e^{-c} \iff e^{-c} = \dfrac{1}{20} \iff c = \log(20) \approx 2.996$.

(ii) $\mathbb{P}(X > c | B) = e^{-\frac{1}{2}c} = e^{-\frac{1}{2}\log(20)} = 20^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0.223$.

(iii) Abbiamo che $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$. La probabilità che la giuria si sbagli é

$$p = \mathbb{P}(\{X > c\} \cap A) + \mathbb{P}(\{X < c\} \cap B) = \mathbb{P}(X > c|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X < c|B)\mathbb{P}(B) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{20} + 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \simeq 0.413.$$

Il valore atteso del numero di volte in cui la giuria sbaglia su dieci sentenze è quindi il valore atteso di una binomiale $Bin(n,p)$ con $n = 10$ e $p \simeq 0.413$, cioè $np \simeq 4.13$.

Esercizio 6 Sia $0 \leq z \leq 2$. Allora

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \leq z | T = n)\, \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq z)\, \mathbb{P}(T = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 > z, \ldots, X_n > z)\big)\, \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 > z)^n\big)\, p(1-p)^{n-1} =$$

$$= p \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)^n\right)(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} - p\left(1 - \frac{z}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{n-1} (1-p)^{n-1} =$$

$$= 1 - p\left(1 - \frac{z}{2}\right) \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)(1-p)} = \frac{z}{p(2-z) + z}.$$

Quindi la funzione di distribuzione di Z è $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z}{p(2-z)+z} & 0 \leq z \leq 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}$.

Esercizio 7 Modellizziamo il bastoncino con l'intervallo $[0, 1]$ e il punto in cui viene spezzato con un'uniforme $X \sim U(0, 1)$.

1. Sia L la variabile aleatoria $L := \{\text{lunghezza del segmento più corto}\} = \min\{X, 1 - X\}$. Notiamo che $supp(L) = [0, 1/2]$.

$$F_L(x) := \mathbb{P}(L < x) = 1 - \mathbb{P}(\{X > x\} \cap \{1 - X > x\}) = 1 - \mathbb{P}(x < X < 1 - x) =$$

$$= (1 - (1 - 2x))\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x) \Longrightarrow f_L(x) := \frac{d}{dx} F_L(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1/2]}(x).$$

Quindi il valore atteso di L è

$$\mathbb{E}[L] := \int_{-\infty}^{\infty} x f_L(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} 2x\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

2. Sia ora R la variabile aleatoria

$$R := \{\text{rapporto tra la lunghezza del segmento più corto e quella del segmento più lungo}\} =$$

$$= \frac{\min\{X, 1 - X\}}{\max\{X, 1 - X\}} = \phi(X),$$

dove $X \sim U(0, 1)$ e

$$\phi(x) := \frac{x}{1-x}\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x) + \frac{1-x}{x}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x).$$

Ora,

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x) + \frac{1-x}{x}\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x$$

(applica il cambiamento di variabili $x \longrightarrow 1 - x$ nel primo integrale). Ora basta calcolare

$$2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x = 2(\log(x) - x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 2\log(2) - 1 \simeq 0.3862.$$

Esercizio 8

(i) Poichè $X_i \sim Exp(\lambda)$ i.i.d., $M_n = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i$ e $W_n = \dfrac{M_n}{logn}$,

$$F_{W_n}(x) = \mathbb{P}(W_n \le x) = \mathbb{P}(M_n \le x\log n) = \mathbb{P}(X_1 \le x\log n, \dots, X_n \le x\log n) =$$
$$= \left(1 - e^{-\lambda x \log n}\right)^n = \left(1 - e^{\log(n^{-\lambda x})}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda x}}\right)^n.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda x}}\right)^{n^{\lambda x}}\right]^{\frac{1}{n^{\lambda x - 1}}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } x = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

(ii) Per ogni $\epsilon \ge 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{\log n} - \frac{1}{\lambda}\right| > \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\log n} - \frac{1}{\lambda} > \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\log n} - \frac{1}{\lambda} < -\epsilon\right)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 - \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\log n} \le \frac{1}{\lambda} + \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\log n} < \frac{1}{\lambda} - \epsilon\right)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 - F_{W_n}\left(\frac{1}{\lambda} + \epsilon\right) + F_{W_n}\left(\frac{1}{\lambda} - \epsilon\right)\right] = 1 - 1 + 0 = 0.$$

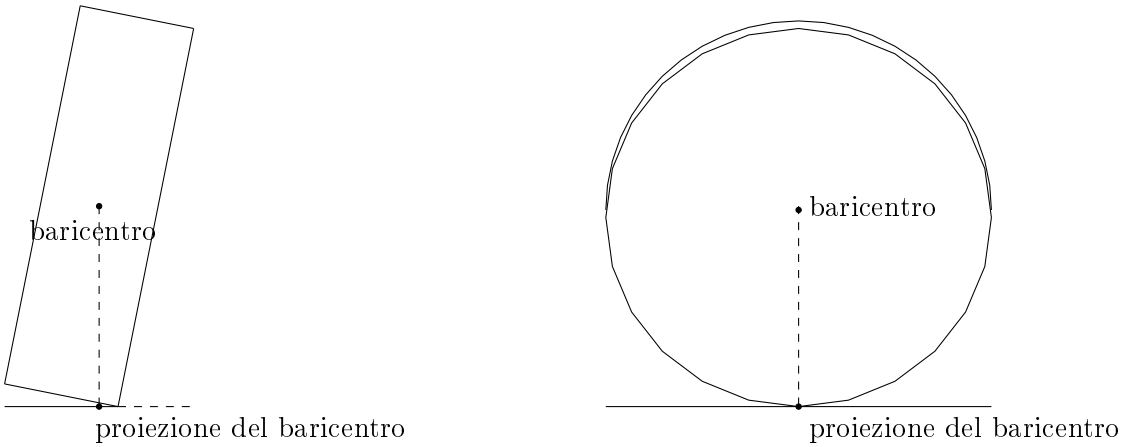
(iii) Poichè $Z_n = M_n - \dfrac{1}{\lambda}\log n$,

$$F_{Z_n}(t) = \mathbb{P}(Z_n \le t) = \mathbb{P}\left(M_n \le t + \frac{1}{\lambda}\log n\right) = \mathbb{P}\left(W_n \le \frac{t}{\log n} + \frac{1}{\lambda}\right) = F_{W_n}\left(\frac{t}{\log n} + \frac{1}{\lambda}\right),$$

quindi $F(t) = \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)$ esiste.

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} F_{W_n}\left(\frac{t}{\log n} + \frac{1}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \log n \\ e^{-1} & \text{se } t = \log n \\ 1 & \text{se } t > \log n \end{cases}.$$

Esercizio 9 Ricordiamo dalla fisica di scuola che un corpo rimane in equilibrio se la proiezione del suo baricentro sul terreno cade all'interno della proiezione della base. Modellizziamo la moneta come un cilindretto di raggio R e spessore S fatto di un materiale omogeneo (in modo che il baricentro corrisponda al punto medio del segmento ottenuto intersecando la moneta con una retta passante per il centro della circonferenza alla base e perpendicolare ad essa) .



Immaginiamo la moneta iscritta dentro una sfera: il problema si riconduce quindi a stabilire qual è la probabilità, prendendo un punto uniformemente a caso sulla superficie della sfera e tirando il raggio che unisce il punto al centro della sfera, che tale raggio intersechi il bordo della moneta. Poichè il punto lo abbiamo preso uniformemente a caso sulla superficie, tale probabilità sarà uguale al rapporto tra l'area della zona sferica compresa tra le due facce della moneta e l'area totale della sfera. Ora, possiamo pensare le due facce della moneta come le intersezioni di due piani paralleli e simmetrici rispetto al centro con la sfera. Questi due piani saranno tra di loro distanti esattamente S, lo spessore della moneta. Chiamando ρ il raggio della sfera, Z la zona sferica compresa tra le due facce della moneta e Σ la superficie della sfera, e applicando il fatto geometrico citato nel testo chiamando α la costante di proporzionalità tra le aree e le distanze tra i piani, otteniamo:

$$\mathbb{P}(\{\text{la moneta rimane dritta sul bordo}\}) = \frac{\text{Area}(Z)}{\text{Area}(\Sigma)} = \frac{\alpha S}{\alpha \cdot 2\rho} = \frac{S}{2\rho} = \frac{1}{3} \Longrightarrow S = \frac{2}{3}\rho$$

Per mettere in relazione il raggio della sfera ρ con il raggio della moneta R è sufficiente usare il teorema di Pitagora:

$$R^2 = \rho^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2 = \rho^2 - \left(\frac{\rho}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\rho^2 \Longrightarrow \rho = \frac{3}{2\sqrt{2}}R \Longrightarrow S = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

cioè lo spessore della moneta deve essere $\frac{1}{2\sqrt{2}} \simeq 0.3535$ volte il suo diametro.