

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 6

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{[0,2]}(x) dx = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_0^2 = 1,$$

quindi è una densità di probabilità.

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-3x} dx = \left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{3},$$

quindi non è una densità di probabilità.

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1,$$

quindi è una densità di probabilità.

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^x dx = -e^{-x} \Big|_{-\infty}^0 + e^x \Big|_0^{\infty} = -1 + 2 \lim_{M \rightarrow \infty} e^M - 1 = \infty,$$

quindi non è una densità di probabilità.

Esercizio 2

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(C - x^2) \mathbb{1}_{[0,2]}(x) dx = \int_0^2 x(C - x^2) dx = \left[C \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2C - 4.$$

$$2C - 4 = 1 \iff C = \frac{5}{2} = 2.5.$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} C \sin(x) \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x) dx = C \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = C \cdot (-\cos(x)) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

il che implica che non esiste alcun valore di C che renda questa funzione una funzione di distribuzione.

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cx^{-(\lambda+1)} \mathbb{1}_{\{x > r\}}(x) dx = \int_r^{\infty} Cx^{-(\lambda+1)} dx = -C \frac{x^{-\lambda}}{\lambda} \Big|_r^{\infty} = -C \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{r^{-\lambda}}{\lambda} \right) = C \frac{r^{-\lambda}}{\lambda},$$

poichè $\lambda > 0$.

$$C \frac{r^{-\lambda}}{\lambda} = 1 \iff C = \lambda r^{\lambda}.$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^n x^n e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) dx = \int_0^{\infty} C^n x^n e^{-x}.$$

Chiamiamo $I_n := \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ e integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = x^n \cdot (-e^{-x}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n x^{n-1} \cdot (-e^{-x}) dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot (-e^{-x}) - 0 + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1} \end{aligned}$$

D'altro canto, abbiamo che $I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, e dunque, unendo ciò alla relazione ricorsiva ricavata sopra, ricaviamo che:

$$I_0 = 1, I_1 = 1 \cdot I_0 = 1, I_2 = 2 \cdot 1 = 2!, I_3 = 3 \cdot I_2 = 3 \cdot 2!, \dots, I_n = n \cdot I_{n-1} = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Poichè deve essere $C^n \cdot I_n = 1$, abbiamo che $C = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Esercizio 3 Cerchiamo innanzitutto il valore di c . $\int_0^1 c x^n dx = c \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{c}{n+1}$, da cui otteniamo $c = n+1$. Quindi

$$\mathbb{P}(X > y) = \int_y^1 (n+1)x^n dx = x^{n+1} \Big|_y^1 = 1 - y^{n+1}.$$

Esercizio 4

$$(a) \int_{-1}^1 c(1-x^2) dx = c \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}c = 1 \iff c = \frac{3}{4}.$$

$$(b) F_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \int_{-1}^y \frac{3}{4}(1-x^2) dx = \frac{3}{4} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^y = \frac{3y - y^3 + 2}{4}.$$

Esercizio 5

$$\int_0^{\infty} C x e^{-x/2} dx = C \left(-2x e^{-x/2} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} e^{-x/2} dx \right) = 2C \left[-2e^{-x/2} \right]_0^{\infty} = 4C = 1 \iff C = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X > 5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{4} x e^{-x/2} dx = \frac{1}{4} \left[-2x e^{-x/2} + 2(-2e^{-x/2}) \right]_5^{\infty} = \frac{7}{2} e^{-5/2} = 3.5 e^{-5/2}.$$

Esercizio 6 Sia c la capacità del serbatoio e consideriamo l'evento

$$A := \{\text{il gasolio viene esaurito in una settimana}\}.$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(X < c) = 1 + \int_0^c 5(1-x)^4 dx = 1 + (1-x)^5 \Big|_0^c = 1 + (1-c)^5 - 1 = (1-c)^5.$$

$$\text{Quindi } \mathbb{P}(A) = 0.01 \iff (1-c)^5 = 0.01 \iff c = 1 - (0.01)^{1/5}.$$

Esercizio 7

$$(a) \mathbb{P}(X > 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = -10x^{-1} \Big|_{20}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

$$(b) F_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \int_{10}^y \frac{10}{x^2} dx = -10x^{-1} \Big|_{10}^y = 1 - \frac{10}{y}.$$

(c) Consideriamo i seguenti eventi:

$A := \{\text{l'apparecchiatura funziona per almeno 15 ore}\};$

$B := \{\text{su 6 apparecchiature di questo tipo almeno 3 funzionano per almeno 15 ore}\}.$

Sia $Y \sim \text{Bin}(6, p)$, dove $p := \mathbb{P}(A)$. Allora $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(Y \geq 3)$. Poichè

$$p = \mathbb{P}(A) = \int_{15}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = -10x^{-1} \Big|_{15}^{\infty} = \frac{2}{3},$$

si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - (1-p)^6 - 6(1-p)^5 p - \binom{6}{2} (1-p)^4 p^2 = \\ &= 1 - \frac{1}{3^6} - 6 \frac{1}{3^5} \frac{2}{3} - 15 \frac{1}{3^4} \frac{4}{3^2} = 1 - \frac{73}{3^6} \simeq 0.899. \end{aligned}$$

Esercizio 8 Prima di aprire la prima scatola scegli un numero a caso mediante una variabile aleatoria continua X con supporto $\mathbb{R}^+$, e poi apri la scatola: se il numero che hai scelto è maggiore del valore del premio nella scatola, la cambi, altrimenti la tieni. Facciamo vedere che con questa strategia la probabilità di prendere il premio più grande è maggiore di $1/2$. Sia a il valore del premio nella prima scatola e b il valore del premio in quella che verrà aperta dopo. Supponiamo di osservare che X sia maggiore di a . Si possono presentare due casi: X è maggiore sia di a che di b oppure $a \leq X \leq b$. Nel primo caso, la probabilità che $b > a$ è $1/2$ per simmetria, mentre nel secondo caso è 1. Abbiamo quindi che

$$\mathbb{P}(b > a) = \mathbb{P}(b > a | b > X) \mathbb{P}(b > X) + \mathbb{P}(b > a | b < X) \mathbb{P}(b < X) = \frac{1}{2}p + (1-p) = 1 - \frac{1}{2}p > \frac{1}{2}$$

se $0 < p < 1$ (il che è vero perchè abbiamo scelto una distribuzione con supporto tutto $\mathbb{R}^+$, e che quindi non può assegnare probabilità 0 o 1 ad un evento della forma $X > a$ o $X < a$, visto che $a > 0$). Quindi abbiamo mostrato che se $a < X$, cambiando pacco hai una probabilità maggiore di $1/2$ di vincere il premio più grande. Con un ragionamento del tutto analogo possiamo mostrare che se invece $a > X$ hai la stessa probabilità di vincere tenendo il pacco.

Esercizio 9 Lanciamo $n + m + 1$ volte una freccetta su $[0, 1]$ e associamo a ogni lancio un punteggio compreso tra 0 e 1 corrispondente al punto che abbiamo preso con la freccetta. Sia N il massimo punteggio che otteniamo nei primi n lanci, M il minimo punteggio che otteniamo nei successivi m lanci e u il punteggio che otteniamo con l'ultimo ($n + m + 1$ -esimo) lancio. Consideriamo l'evento $A := \{N \leq u \leq M\}$. Se fissiamo u abbiamo che, affinchè A si verifichi, deve succedere che tutti i primi n lanci ricadano nell'intervallo $[0, u]$ e i successivi m nell'intervallo $[u, 1]$. La probabilità che una freccetta cada in un sottoinsieme di $[0, 1]$ è uguale all'area di tale sottoinsieme. Poichè i lanci sono indipendenti, otteniamo che, fissato u , la probabilità che accada quanto detto sopra è $u^n(1-u)^m$. Ma u rappresenta a sua volta il lancio di una freccetta, che può andare a cadere su tutto l'intervallo $[0, 1]$, quindi abbiamo che

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^1 u^n(1-u)^m du.$$

Adesso numeriamo i lanci e ordiniamoli in base al punteggio ottenendo una permutazione dei numeri da 1 a $n + m + 1$ (i.e, consideriamo la permutazione $\sigma(i) = \text{posizione nella classifica dei}$

punteggi dell' i -esimo lancio"). Se si verifica l'evento A avremo i primi n lanci permutati tra di loro tra le posizioni 1 e n , i successivi m permutati tra di loro tra le posizioni $n+2$ e $n+m+1$, e l'ultimo lancio fisso alla posizione $n+1$. Quindi abbiamo $n!m!$ casi favorevoli per l'evento A e $(n+m+1)!$ casi possibili (tutte le permutazioni degli $m+n+1$ lanci). Quindi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \implies \int_0^1 u^n (1-u)^m du = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$