Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 5

Docente: Prof. Pietro Caputo
Tutori: Sara Caffarelli e Davide Macera

Esercizio 1 Vediamo com'è fatta F_X: $F_X(b) = 0$ se $b < 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X < b) = 0 \forall b < 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X < 0) = 0$. Ma $F_X(b) = 1/2$ se $0 \leq b < 1 \Longrightarrow \mathbb{P}(X \leq 0) = 1/2 \Longrightarrow p(0) := \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) - \mathbb{P}(X < 0) = 1/2$. Inoltre, $\mathbb{P}(X < 1) = 1/2$, ma $F_X(b) = 3/5$ se $1 \leq b < 2, \Longrightarrow p(1) := \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X < 1) = 3/5 - 1/2 = 1/10$. Ragionando in maniera analoga, troviamo: $p(2) = 4/5 - 3/5 = 1/5$, $p(3) = 9/10 - 4/5 = 1/10$, $p(3.5) = 1 - 9/10 = 1/10$. Per ogni altro $b \in \mathbb{R}$, $p(b)$ dovrà essere uguale a zero. In conclusione,

$$p(b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & b = 0 \\ \frac{1}{10} & b = 1 \\ \frac{1}{5} & b = 2 \\ \frac{1}{10} & b = 3 \\ \frac{1}{10} & b = 3.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 2 Vedi la soluzione dell'esercizio 2 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esame1_2013.pdf`.

Esercizio 3 Vedi la soluzione dell'esercizio 5 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame2_080710.pdf`.

Esercizio 4 Vedi la soluzione dell'esercizio 2 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame3_150910.pdf`.

Esercizio 5 Vedi la soluzione dell'esercizio 1 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame1_030610.pdf`.

Esercizio 6

1. Supponiamo che Alessandro, in caso di stesso punteggio dopo due partite, scelga "testa". Consideriamo gli eventi:
   $V_n :=$ Alessandro vince l'n-esima partita;
   $P_n :=$ Alessandro perde l'n-esima partita;
   $E_n :=$ Alessandro pareggia l'n-esima partita;
   $T :=$ Esce testa.
   Poichè gioca la prima partita con un approccio offensivo, non può pareggiarla. Inoltre, se vince la prima partita non può vincere anche la seconda, dato che nella seconda partita giocherebbe con l'approccio difensivo. Quindi

$$p_* = \mathbb{P}(V_1 \cap E_2) + \mathbb{P}(V_1 \cap P_2 \cap T) + \mathbb{P}(P_1 \cap V_2 \cap T) = p \cdot q + \frac{1}{2}(p \cdot (1-q) + (1-p) \cdot p) =$$

$$= p \cdot \left(1 + \frac{q}{2}\right) - \frac{p^2}{2}.$$

2.
$$p_* > \frac{1}{2} \iff p \cdot (2+q) - p^2 > 1 \iff 1 + \frac{q - \sqrt{q^2+4q}}{2} < p < 1.$$
Dunque per $q = 0.9$ si ha che $p_* > \frac{1}{2} \iff p > 0.4$.
Il fatto che Beatrice abbia maggiore probabilità di vincere una partita si traduce nel fatto che p sia minore di $1/2$ (il valore di q non influisce, poichè se Alessandro gioca in maniera difensiva può solo pareggiare o perdere, quindi Beatrice ha *sempre* maggiore probabilità di vincere). Abbiamo appena visto che se $q = 0.9$ e $p > 0.4$, Alessandro ha probabilità di vittoria maggiore di $1/2$. Quindi, ad esempio, se $q = 0.9$ e $0.4 < p < 0.5$, si ha che Beatrice ha maggiore probabilità di vincere ciascuna partita nonostanta Alessandro abbia maggiore probabilità di vincere la gara. In generale, ciò si verifica per ogni p, q tali che $1 + \frac{q - \sqrt{q^2+4q}}{2} < p < 0.5$.

Esercizio 7 Vedi la soluzione dell'esercizio 2 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esonero1_2013.pdf`.

Esercizio 8 Vedi la soluzione dell'esercizio 3 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2011/sol_esonero1_120411.pdf`.

Esercizio 9 Vedi la soluzione dell'esercizio 5 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2012/sol_esonero1_2012.pdf`.

Esercizio 10 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame3_150910.pdf`.

Esercizio 11 Possiamo scrivere $X = 2Y - 2$, dove $Y = \#\{\text{palline nere estratte nelle due estrazioni}\}$ è una v. a. ipergeometrica di parametri $(2, 14, 8)$.

1. $\text{Range}(X) = \{-2, 0, 2\}$.
$\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{\binom{8}{0}\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{15}{91}$;
$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{6}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{48}{91}$;
$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{6}{0}}{\binom{14}{2}} = \frac{4}{13}$.

2. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \text{Range}(X)} x\mathbb{P}(X = x) = -2\mathbb{P}(X = -2) + 2\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{7}$.
$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in \text{Range}(X)} x^2\mathbb{P}(X = x) = 4\left(\frac{15}{91} + \frac{4}{13}\right) = \frac{172}{91}$, quindi
$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{4 \cdot 288}{49 \cdot 13} \approx 1.8.$$