Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 4

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO
TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1

(i) Sia F_X la funzione di distribuzione di X.
$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \mathbb{P}(X < a) = 1 - F_X(a) + p(a)$, dove $p(a) = \mathbb{P}(X = a)$.

(ii) $F_{e^X}(y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \log y) = F_X(\log y)$.

(iii) $F_{aX+b}(y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a})$.

Esercizio 2 $X, Y \sim Ge\big(\frac{1}{2}\big)$.

(i) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 2$.

(ii) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

(iii) Poichè $\mathbb{P}(Y = 2) = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ e $\mathbb{P}(\{X > 2\} \cap \{Y = 2\}) = \mathbb{P}((1,5)) + \mathbb{P}((3,5)) = \dfrac{1}{18}$ (dove con (n, m) intendiamo l'evento $\{$al primo lancio esce n e al secondo esce $m\}$), si ha $\mathbb{P}(X > 2 | Y = 2) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X > 2\} \cap \{Y = 2\})}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \dfrac{2}{9}$.

(iv) $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X = Y = k\}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3 Vedi la soluzione dell'esercizio 3 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2011/sol_esame3_2011.pdf`.

Esercizio 4 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2012/sol_esonero1_2012.pdf`.

Esercizio 5 Se M. Bruno vincesse una sola delle trentasei giocate vincerebbe 36€, cioè esattamente quello che ha scommesso, e quindi andrebbe in pari. Di conseguenza, l'unico caso in cui sarebbe in passivo è quello in cui perde tutte e trentasei le giocate. Chiamiamo L l'evento che lui non vinca neanche una volta:

$$\mathbb{P}(L) = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \simeq e^{-1} \cdot \left(\frac{38}{37}\right)^2 = e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{2}{37} + \frac{1}{37^2}\right) \simeq e^{-1} \simeq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{8}.$$

Quindi il valore atteso della vincita di ciascuna delle sue scommesse con Davide è all'incirca

$$-20 \cdot \frac{3}{8} + 20 \cdot \frac{5}{8} = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5€$$

Notiamo tuttavia che il valore atteso della sua vincita in ciascuna giocata é $35 \cdot 1/38 - 1 \cdot 37/38 = -1/19$ (bisogna togliere l'euro che si è giocato a quelli vinti), cioè in 36 giocate accusa una perdita di $36/19 < 2$€, il che significa che nel complesso dalla roulette e dalle scommesse con

Davide, M. Bruno guadagna più di tre euro ogni 36 giocate, mentre se avesse soltanto giocato alla roulette ne avrebbe persi quasi due! La morale è che la cura è controproducente sia per M. Bruno, poichè vincere soldi non fa di certo bene alla sua dipendenza, sia per Davide che, ricordiamolo, in tutto ciò sta sborsando mediamente 5€ a scommessa...

Esercizio 6

1. Possiamo vedere le monete come variabili di Bernoulli indipendenti di parametro $p = 7/32000000$. Con "il numero di monete rare" ci stiamo riferendo al numero di successi su $n = 3000$ prove indipendenti . Chiamiamo N tale numero. Allora il valore atteso in euro del contenuto del boccale di birra è $\mathbb{E}[C] = (3000 - \mathbb{E}[N] + 250000 \cdot \mathbb{E}[N])/100$. Ma $\mathbb{E}[N] = n \cdot p = 21/32000 \simeq 1/1500$, quindi $\mathbb{E}[C] = (3000 - 1/1500 + 250000/1500)/100 \simeq (3000 + 166)/100 = 31,66$€

2. In questo caso dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(N = 0)$. Per fare ciò, siccome abbiamo tante prove con probabilità di successo piccola, può essere conveniente approssimare la binomiale con una Poisson (chiamiamola X) di parametro $\lambda = n \cdot p \simeq 1/1500$. Quindi

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \simeq e^{-1/1500} \simeq 0.9993.$$

In alternativa avresti potuto usare la binomiale (chiamiamola Y), ottenendo

$$\mathbb{P}(Y = 0) \simeq \left(1 - \frac{7}{32000000}\right)^{3000} \simeq 0.9993.$$

Nota inoltre che applicando il binomio di Newton sarebbe venuto

$$\left(1 - \frac{7}{32000000}\right)^{3000} = 1 - \binom{3000}{1} \cdot \left(\frac{7}{32000000}\right) + \binom{3000}{2} \cdot \left(\frac{7}{32000000}\right)^2 +$$

$$+ \ldots \simeq 1 - 3000 \cdot \left(\frac{7}{32000000}\right) \simeq 1 - 1/1500 \simeq 0.9993.$$

In ogni caso, la morale è che la probabilità che tra le sue monete non ce ne fosse nessuna rara era decisamente alta...

Esercizio 7

(i) Sia $Y = \#\{\text{figli di ogni coppia}\}$. Sia $X = \#\{\text{prove per il primo maschio}\} \sim Ge(\frac{1}{2})$. Quindi $Y = \min\{X, 10\}$.
Poichè l'ultimo figlio può essere sia maschio che femmina,

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x=1}^{10} x\mathbb{P}(X = x) + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \sum_{x=1}^{10} x\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{512} = 2 - \frac{1}{512}.$$

Quindi ci si aspetta che la popolazione diminuisca di pochissimo.

(ii) Sia $Z = \#\{\text{numero di figli maschi di una coppia}\}$. Ogni famiglia ha un figlio maschio oppure 10 figlie femmine. Quindi $\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \mathbb{P}(10 \text{ femmine}) = 1 - \frac{1}{1024}$. Dunque $Z \sim Be(p)$ con $p = 1 - \frac{1}{1024}$, e quindi $\mathbb{E}[Z] = p$.
Poichè $\mathbb{E}[Y] = 2 - \frac{1}{512} = 2\mathbb{E}[Z]$, ci si aspetta che ci saranno tanti maschi quante femmine.

Esercizio 8 Sia $X = \#\{\text{euro persi in una giocata}\}$. Distinguiamo 3 casi, a seconda dell'esito del lancio dei 3 dadi:

1. Supponiamo che il lancio dei 3 dadi produca 3 numeri diversi, ad esempio 1,2,3. Il giocatore riprende le poste messe sui 3 numeri usciti e ne vince 3, una per ciascun numero uscito. Quindi non guadagna nè perde nulla.

2. Supponiamo che il lancio dei 3 dadi produca esattamente 2 numeri uguali, ad esempio 1,1,2. Il giocatore riprende le poste messe sui 2 numeri usciti e ne vince 3, di cui due per il numero uscito due volte e una per quello uscito una volta. Quindi perde una posta, cioè 1€ ($X = 1$).

3. Supponiamo che il lancio dei 3 dadi produca 3 numeri uguali, ad esempio 1,1,1. Il giocatore riprende la posta messa sul numero uscito e ne vince 3. Quindi perde due poste ($X = 2$).

Resta da calcolare la probabilità con cui si verificano tali lanci.
Sia $\Omega = \{\text{possibili esiti di un lancio di 3 dadi}\}$ lo spazio campionario. $\#\Omega = 6^3 = 216$.

$$\mathbb{P}(\text{3 dadi diversi}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{5}{9};$$
$$\mathbb{P}(\text{3 dadi uguali}) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{216} = \frac{1}{36};$$
$$\mathbb{P}(\text{esattamente 2 dadi uguali}) = 1 - \mathbb{P}(\text{3 dadi diversi}) - \mathbb{P}(\text{3 dadi uguali}) = \frac{5}{12}.$$

Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{9} \cdot 0 + \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{5}{12} \cdot 1 = \frac{17}{36}$. Giocando 36 volte il giocatore si aspetta di perdere 17€.

Esercizio 9

1. Poichè gli elementi di $\widetilde{V}_p$ vengono scelti a caso con probabilità p indipendentemente, abbiamo che la sua cardinalità è una binomiale su n prove con probabilità di successo p, il cui valore atteso è $n \cdot p$. Sia $\widetilde{E}_p$ l'insieme dei lati del grafo indotto da $\widetilde{V}_p$. Preso a caso un lato di G, la probabilità che esso stia in $\widetilde{E}_p$ è uguale alla probabilità che entrambi i vertici ai suoi estremi siano in $\widetilde{V}_p$, che, per come è costruito $\widetilde{V}_p$, è uguale a p^2, e quindi, analogamente a prima, il valore atteso del numero di lati in $\widetilde{E}_p$ è $d \cdot n \cdot p^2$. Quindi
$$\max_{0 \le p \le 1} \mathbb{E}[X_p - Y_p] = \max_{0 \le p \le 1} (\mathbb{E}[X_p] - \mathbb{E}[Y_p]) = \max_{0 \le p \le 1} (n \cdot p - d \cdot n \cdot p^2).$$
Poichè
$$\frac{d}{dp}(n \cdot p - d \cdot n \cdot p^2) = n - 2d \cdot n \cdot p = 0 \Longleftrightarrow p = 1/2d,$$
e poichè si verifica che $\mathbb{E}[X_{1/2d} - Y_{1/2d}] = n/2d - n/4d = n/4d$ è un massimo in $(0,1)$, abbiamo che
$$\max_{0 \le p \le 1} \mathbb{E}[X_p - Y_p] = \frac{n}{4d}.$$

2. Consideriamo le nostre n persone come i vertici di un grafo in cui mettiamo un lato tra due vertici se le corrispondenti persone si conoscono. Due vertici si dicono *adiacenti* se esiste un lato che ha per estremi tali vertici. Vogliamo far vedere che, comunque sia fatto questo grafo, prendendo a caso un sottoinsieme di V la probabilità che il sottografo indotto abbia almeno $n/4d$ vertici non adiacenti tra loro è diversa da 0. Se chiamiamo $Z := X_{1/2d} - Y_{1/2d}$ abbiamo, dal primo punto
$$\mathbb{E}\left[Z - \frac{n}{4d}\right] = 0 \Longrightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}\left(Z - \frac{n}{4d} = i\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}\Big(Z - \frac{n}{4d} = i\Big) = - \sum_{i=-\infty}^{-1} i \cdot \mathbb{P}\Big(Z - \frac{n}{4d} = i\Big).$$

Quindi i termini dell'ultima uguaglianza sono entrambi nulli, oppure sono entrambi positivi. Ma se fossero entrambi nulli, ciò implicherebbe che $\mathbb{P}(Z - n/4d = 0) = 1$, il che è assurdo, quindi sono entrambi positivi. In particolare

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \mathbb{P}\Big(Z - \frac{n}{4d} = i\Big) > 0 \Longrightarrow \mathbb{P}\Big(Z > \frac{n}{4d}\Big) > 0.$$

Quindi sappiamo che esiste un sottografo di G tale che la differenza tra il numero dei suoi vertici e il numero dei suoi lati è maggiore di $n/4d$. A questo punto possiamo, per ogni lato, scegliere uno dei due vertici ai suoi estremi, e cancellarlo insieme ad esso. L'insieme dei vertici rimanenti ha cardinalità $\geq n/4d$, e non ci sono lati in G che connettono due qualsiasi dei suoi vertici. Reinterpretando i vertici come persone e i lati come relazioni di conoscenza, si ottiene l'enunciato dell'esercizio.