Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 3

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO
TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1 Sia $A \subseteq \Omega$. Si ha $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cup \emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset)$, da cui segue che $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Esercizio 2 Chiamiamo N_i (rispettivamente B_i, R_i) l'evento {alla i-esima estrazione prendiamo una palla nera (rispettivamente bianca, rossa)}.
Per la formula della probabilità totale abbiamo che

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|N_1)\cdot\mathbb{P}(N_1)+\mathbb{P}(R_2|B_1)\cdot\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(R_2|R_1)\cdot\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}+\frac{1}{12} = \frac{7}{36}.$$

Esercizio 3

(i) $$\mathbb{P}(3\,T|\text{ la prima è } T) = \frac{\mathbb{P}(\{3\,T\} \cap \{\text{la prima è } T\})}{\mathbb{P}(\text{la prima è } T)} = \frac{\mathbb{P}(3\,T)}{\mathbb{P}(\text{la prima è } T)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4};$$

(ii) $$\mathbb{P}(3\,T|\text{ prima e seconda sono } T) = \frac{\mathbb{P}(3\,T)}{\mathbb{P}(\text{prima e seconda sono } T)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2};$$

(iii) $$\mathbb{P}(3\,T|2\,T) = \frac{\mathbb{P}(3\,T)}{\mathbb{P}(2\,T)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 4 Sia X il numero della moneta scelta.

$$\mathbb{P}(X=i|T) = \frac{\mathbb{P}(T|X=i)\cdot\mathbb{P}(X=i)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\frac{i}{10}\frac{1}{10}}{\sum_{j=1}^{10}\mathbb{P}(T|X=j)\cdot\mathbb{P}(X=j)} = \frac{\frac{i}{10}\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}\frac{j}{10}} = \frac{\frac{i}{10}}{\frac{1}{10}\frac{10(10+1)}{2}} = \frac{i}{55}.$$

Esercizio 5 Consideriamo i seguenti eventi:
$D :=$ {la radio è difettosa};
$D_1 :=$ {la prima radio è difettosa};
$D_2 :=$ {la seconda radio è difettosa};
$E :=$ {entrambe le radio sono difettose}.
Poichè $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, usando Bayes si ottiene

$$\mathbb{P}(D_2|D_1) = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(D_1)} = \frac{\mathbb{P}(E|A)+\mathbb{P}(E|B)}{\mathbb{P}(D_1|A)+\mathbb{P}(D_1|B)} = \frac{\frac{5}{100}\frac{5}{100}+\frac{1}{100}\frac{1}{100}}{\frac{5}{100}+\frac{1}{100}} = \frac{13}{300} \approx 0.43.$$

Esercizio 6

$$\mathbb{P}(\text{vince L}) = \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(C,C,T) + \mathbb{P}(C,C,C,C,T) + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 7 Siano $B := \{\text{lo studente è bravo}\}$ e $G := \{\text{lo studente dà la risposta giusta}\}$. Sappiamo che $\mathbb{P}(B^c) = \alpha$, $\mathbb{P}(G|B) = 1$, $\mathbb{P}(G|B^c) = \frac{1}{10}$ e $\mathbb{P}(B|G) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$. Quindi si ha

$$1 = \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B) = \alpha + \mathbb{P}(B|G) \cdot \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(B|G^c) \cdot \mathbb{P}(G^c) = \alpha + \frac{4}{5} \cdot \mathbb{P}(G) =$$

$$= \alpha + \frac{4}{5}(\mathbb{P}(G|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G|B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)) = \alpha + \frac{4}{5}\left(1 \cdot (1-\alpha) + \frac{1}{10} \cdot \alpha\right) = \frac{23}{25} \cdot \alpha + \frac{4}{5}.$$

Da questa equazione otteniamo $\alpha = \frac{5}{7} \approx 0.714$.

Esercizio 8

(a) Possiamo vedere i voti “sì” come i successi di n prove indipendenti ciascuna avente probabilità di successo pari a $\frac{1}{4}$ (il successo si ha se l'elettore va a votare *e* vota “sì”). Quindi, chiamando N il numero di “sì” scrutinati, abbiamo che:

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}.$$

(b) Sia S_k l'evento $\{\text{vengono scrutinati } k \text{ “sì”}\}$ e V_m l'evento $\{\text{partecipano al voto } m \text{ votanti}\}$. Allora per Bayes

$$\mathbb{P}(V_m|S_k) = \frac{\mathbb{P}(S_k|V_m) \cdot P(V_m)}{\mathbb{P}(S_k)} = \frac{\binom{m}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \binom{n}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}} =$$

$$= \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \cdot \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \cdot 4^k \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{(m-k)! \cdot (n-m)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-m+m-k} = \binom{m-k}{n-m} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

Esercizio 9

1. Dalla definizione di $\mathbb{P}$ e poichè i singoletti sono disgiunti, abbiamo

$$\mathbb{P}(M_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{(nk)^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{k^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{k^s} \cdot \zeta(s) = \frac{1}{k^s}.$$

2. Notiamo che se p_i e p_j sono primi distinti, allora $M_{p_i} \cap M_{p_j} = M_{p_i p_j}$. Infatti, se $h \in M_{p_i} \cap M_{p_j}$ allora $p_i | h$ e $p_j | h$, ma poichè, essendo primi, $MCD(p_i, p_j) = 1$, abbiamo che, per il Lemma di Euclide, $p_i \cdot p_j | h$, cioè $h \in M_{p_i p_j}$.
D'altra parte, se $h \in M_{p_i p_j}$, deve esistere un m tale che $h = m \cdot p_i \cdot p_j$. In particolare, se chiamiamo $k_1 = m \cdot p_i$, e $k_2 = m \cdot p_j$, allora $h = k_2 \cdot p_i \Longrightarrow h \in M_{p_i}$ e $h = k_1 \cdot p_j \Longrightarrow h \in M_{p_j}$, cioè $h \in M_{p_i} \cap M_{p_j}$.
Quindi, per quanto appena detto e per il primo punto,
$$\mathbb{P}(M_{p_i} \cap M_{p_j}) = \mathbb{P}(M_{p_i p_j}) = \frac{1}{(p_i \cdot p_j)^s} = \frac{1}{p_i^s} \cdot \frac{1}{p_j^s} = \mathbb{P}(M_{p_i}) \cdot \mathbb{P}(M_{p_j}).$$
Con un ragionamento induttivo possiamo facilmente estendere quello che abbiamo ottenuto a l primi distinti. Abbiamo in questo modo dimostrato che gli eventi $\{M_p\}_{p \text{ primo}}$ sono indipendenti.

3. Ricordiamo che se $A_1, A_2, \ldots, A_l$ sono eventi indipendenti, allora anche $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_l^c$ lo sono. Quindi, per il secondo punto,
$$\mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \ldots \cap M_{p_l}^c) = \mathbb{P}(M_{p_1}^c) \cdot \mathbb{P}(M_{p_2}^c) \cdots \mathbb{P}(M_{p_l}^c).$$
Ma allora, per il primo punto,
$$\mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \ldots \cap M_{p_l}^c) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right).$$

4. Fissato un primo p_i, l'insieme $M_{p_i}^c$ è formato da tutti i numeri naturali che *non* sono multipli di p_i. Ma allora l'insieme $\bigcap_{p \text{ primo}} M_p^c$ è formato da tutti i numeri naturali *che non sono multipli di nessun numero primo*. C'è un solo numero naturale che ha questa proprietà, ed è 1. Quindi $\bigcap_{p \text{ primo}} M_p^c = \{1\}$. Per il punto precedente e dato che possiamo portare dentro il limite,
$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(M_{p_1}^c \cap M_{p_2}^c \cap \ldots \cap M_{p_n}^c) = \mathbb{P}(\bigcap_{p \text{ primo}} M_p^c) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$
cioè
$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$