Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 2

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO
TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1 Sappiamo che $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Sostituendo i dati che abbiamo nella formula otteniamo $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

Esercizio 2 $\#\Omega = \binom{52}{5}$.

1.
$$\mathbb{P}(\text{full}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{5 \cdot 17 \cdot 49} \approx 0.001.$$

2.
$$\mathbb{P}(\text{poker}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{4} \cdot 12 \cdot \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{5 \cdot 17 \cdot 49} \approx 0.0002.$$

3. Il nuovo spazio campionario è Ω' con $\#\Omega' = \binom{52-5}{3}$. Si ha quindi
$$\mathbb{P}(\text{poker con una coppia in mano}) = \frac{1 \cdot (12 \cdot \binom{4}{1} - 3)}{\binom{47}{3}} = \frac{3}{23 \cdot 47} \approx 0.002.$$

Esercizio 3 Prendiamo a caso uno degli assicurati presso la compagnia. Chiamiamo A, M, B, R gli eventi:
$A := \{$l'assicurato in questione è ad alto rischio$\}$;
$M := \{$l'assicurato in questione è a medio rischio$\}$;
$B := \{$l'assicurato in questione è a basso rischio$\}$;
$R := \{$l'assicurato in questione richiede il pagamento dell'assicurazione$\}$.
Per la *formula della probabilità totale*, $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(R|A) + \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}(R|M) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(R|B) = 0.05 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.75 \cdot 0.02 = 0.045 = 4.5\%$.

Esercizio 4 Prendiamo come spazio campionario $\Omega = \{$possibili scelte di 100 pezzi tra 10000$\}$. Si ha $\#\Omega = \binom{10000}{100}$. Sia $E_r = \{$ci sono r pezzi difettosi tra i 100 esaminati$\}$.
$$\#E_r = \binom{m}{r}\binom{n-m}{k-r}.$$

Quindi
$$\mathbb{P}(E_r) = \frac{\binom{150}{r}\binom{9850}{100-r}}{\binom{10000}{100}}.$$

Esercizio 5 Siano A, B, C e G gli eventi:
$A := \{$solo i due giudici seri prendono la giusta decisione$\}$;
$B := \{$solo uno dei due giudici seri e quello che lancia la moneta prendono la giusta decisione$\}$;
$C := \{$tutti e tre i giudici prendono la giusta decisione$\}$;
$G := \{$la giuria pronuncia il giusto verdetto$\}$.
Notiamo che $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(A \sqcup B \sqcup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$ (dove con '$A \sqcup B$' stiamo indicando l'unione *disgiunta* di A e B). Abbiamo che $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) = p^2 \cdot \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2}$. Quindi $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = p^2 + p \cdot (1-p) = p$, da cui deduciamo che la giuria con tre giudici ha la stessa probabilità p di emettere il giusto verdetto di quella con un solo giudice.

Esercizio 6

1. Ogni persona può diffondere la notizia ai restanti n abitanti, quindi, $\forall i = 2, \ldots, r$, la probabilità che il destinatario non sia la "fonte primaria" all'i-esimo passo è $\frac{n-1}{n}$. D'altro canto, al primo passo, tale probabilià è 1, poichè è la fonte primaria stessa a trasmettere la notizia, e dovrà trasmetterla per forza a qualcun altro. Perciò la probabilità che la notizia sia diffusa r volte senza che ritorni al primo è
$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-1}.$$

2. In questo caso si ragiona in modo simile al caso precedente, tenendo però presente che a ogni passo bisogna escludere la persona che ha diffuso il pettegolezzo al passo precedente. Quindi, la probabilità che il pettegolezzo non venga comunicato due volte alla stessa persona è
$$1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-r+1}{n}\right) = \frac{n!}{n^r \cdot r!}.$$

3. Ragioniamo come nel primo punto, con la differenza che in questo caso, a ogni passo (eccetto il primo, per lo stesso ragionamento del punto 1) il numero dei casi favorevoli è il numero di tutti i possibili modi di scegliere un gruppetto di N persone tra i rimanenti $n-1$ abitanti, ossia $\binom{n-1}{N}$. L'insieme dei casi possibili è l'insieme di tutti i gruppetti di N persone tra tutti gli n abitanti della cittadina meno lo spifferatore di turno, cioè $\binom{n}{N}$. Quindi in questo caso la probabilità che ci interessa è
$$1 \cdot \left(\frac{\binom{n-1}{N}}{\binom{n}{N}}\right)^{r-1} = \left(1 - \frac{N}{n}\right)^{r-1}.$$

   In questo caso, in modo simile a quanto fatto nel punto 2, a ogni passo dobbiamo togliere gli N abitanti che hanno ricevuto la notizia al passo precedente. Svolgendo i conti, la probabilità richiesta è
$$\frac{\binom{n}{N}}{\binom{n}{N}} \cdot \frac{\binom{n-N}{N}}{\binom{n}{N}} \cdot \frac{\binom{n-2N}{N}}{\binom{n}{N}} \cdots \frac{\binom{n-(r-1)N}{N}}{\binom{n}{N}} = \frac{\frac{n!}{(n-rN)!}}{\left(\binom{n}{N} \cdot N!\right)^r}.$$

Esercizio 7 Le rispettive probabilità sono:

- $\mathbb{P}(\{\text{almeno 1 sei su 6 dadi}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\text{nessun sei su 6 dadi}\}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = p_1$;

- $\mathbb{P}(\{\text{almeno 2 sei su 12 dadi}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\text{nessun sei su 12 dadi}\}) - \mathbb{P}(\{\text{1 sei su 12 dadi}\}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = p_2;$
- $\mathbb{P}(\{\text{almeno 2 sei su 12 dadi}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\text{nessun sei su 8 dadi}\}) - \mathbb{P}(\{\text{1 sei su 18 dadi}\}) - \mathbb{P}(\{\text{esattamente 2 sei su 18 dadi}\}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{12}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{16} = p_3.$

Si tratta ora di capire chi sia più grande tra p_1, p_2 o p_3; notiamo subito che $p_2 = 1 - \frac{17}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$, da cui segue che $p_1 \lesseqgtr p_2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{5} \lesseqgtr \frac{6}{17}$. Ma $\left(\frac{5}{6}\right)^{2} = \frac{25}{36} > \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{4} > \frac{4}{9} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{5} > \frac{10}{27} > \frac{5}{14} > \frac{6}{17} \Rightarrow p_1 > p_2$. Con un ragionamento più laborioso ma del tutto analogo, verifichiamo che $p_2 > p_3$. Quindi l'evento più probabile è che esca almeno un sei lanciando sei dadi.

Esercizio 8 Il ragionamento di Alex *non* è corretto. Chiamiamo A, B, C gli eventi
$A \coloneqq \{\text{Alex sarà liberato}\}$;
$B \coloneqq \{\text{Bob sarà liberato}\}$;
$C \coloneqq \{\text{Colin sarà liberato}\}$.
Quello che Alex ha fatto è stato applicare, in modo intuitivo, la formula della probabilità condizionata di A dato B, ottenendo $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$. Il problema è che a lui non interessa veramente calcolare la probabilità di A (lui verrà liberato) dato B (Bob verrà liberato) bensì la probabilità di A dato $\tilde{B}$, dove $\tilde{B} \coloneqq \{$*la guardia dice ad Alex che* Bob verrà liberato$\}$! L'evento $\tilde{B}$ possiamo scrivercelo come $\tilde{B} = (A \cap B \cap \tilde{B}) \cup (B \cap C \cap \tilde{B})$ (la Commissione libera Alex e Bob e la guardia fa il nome di Bob, oppure la commissione libera Bob e Colin e la guardia fa il nome di Bob). Abbiamo che $\mathbb{P}(A \cap B \cap \tilde{B}) = P(A \cap \tilde{B}) = \frac{1}{3}$, dato che se la Commissione libera Alex e Bob la guardia dovrà per forza fare il nome di Bob, mentre $\mathbb{P}(B \cap C \cap \tilde{B}) = \frac{1}{6}$, perchè se la Commissione rilascia Bob e Colin, la guardia può decidere liberamente chi dei due nominare ad Alex. Poichè i due eventi sono disgiunti, abbiamo che $\mathbb{P}(\tilde{B}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Come abbiamo notato prima, ciò che Alex vuole conoscere è

$$\mathbb{P}(A|\tilde{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \tilde{B})}{\mathbb{P}(\tilde{B})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

In conclusione, come ci suggerisce il buon senso, la probabilità che Alex venga rilasciato è indipendente da ciò che gli dice la guardia.

Esercizio 9 Sia r il numero di calzini rossi e sia n il numero di calzini neri.

$$\mathbb{P}(r = 2) = \frac{\binom{r}{2}}{\binom{n+r}{2}} = \frac{r(r-1)}{(n+r)(n+r-1)}$$

Quindi $\mathbb{P}(r = 2) = \frac{1}{2}$ se e solo se $n^2 + n(2r-1) + r - r^2 = 0$, da cui otteniamo

$$n = \frac{1 - 2r + \sqrt{8r^2 - 8r + 1}}{2},$$

dove abbiamo scartato a priori la soluzione negativa. Per rispondere alla prima domanda bisogna quindi trovare il più piccolo r per cui il discriminante è un quadrato perfetto. Sicuramente $r \geq 2$. Per $r = 3$ otteniamo $n = 1$, e il minimo numero di calzini nel cassetto è $r + n = 4$.
Se n deve essere pari allora $n \neq 1$, e $r \geq 4$.
Provando tutti gli $r \geq 4$ e facendo i conti si trova che il più piccolo $r \geq 4$ per cui il discriminante è un quadrato perfetto è $r = 15$, da cui $n = 6$ (che è pari) e $n + r = 21$.
Un altro modo, più efficiente, è notare che se deve essere $\frac{r(r-1)}{(n+r)(n+r-1)} = \frac{1}{2}$, allora, poichè $\frac{r-1}{(n+r-1)} < \frac{r}{(n+r)}$ e il loro prodotto deve fare $\frac{1}{2}$, necessariamente

$$\frac{r-1}{(n+r-1)} < \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{r}{(n+r)}.$$

Maneggiando separatamente le due disuguaglianze per isolare r, otteniamo da quella a sinistra che $r < \frac{n}{\sqrt{2}-1} + 1$, mentre da quella a destra abbiamo che $r > \frac{n}{\sqrt{2}-1}$, cioè r è compreso tra due numeri necessariamente irrazionali (dato che n è naturale) che differiscono per 1. Esiste quindi un unico r intero che soddisfi quelle disuguaglianze. Nota che in questo modo, pur non sapendo ancora chi sia n, per ogni n pari abbiamo quindi un unico r che abbia speranza di risolvere il nostro problema. Provando (con molti meno conti!) tutti gli n pari, otteniamo che per n=6 r dev'essere 15, e sostituendo nella formula vediamo che effettivamente $\frac{15 \cdot 14}{21 \cdot 20} = \frac{1}{2}$.
Vediamo però come possiamo ragionare ancora meglio per trovare n (il che ci permetterà di capire un po' la situazione generale). Cerchiamo una frazione $\frac{p}{q}$ tale che $\frac{p}{q} \cdot n$ sia intero e approssimi r 'abbastanza bene' da far sì che per gli r minori di un certo R,

$$\frac{n}{\sqrt{2}-1} < r < \frac{n}{\sqrt{2}-1} + 1 \Longrightarrow \frac{n}{\sqrt{2}-1} < \frac{p}{q} \cdot n < \frac{n}{\sqrt{2}-1} + 1.$$

Poichè $1 - \sqrt(2) \simeq 0.4142...$, abbiamo che $\frac{n}{\sqrt{2}-1} < \frac{1}{0.4} \cdot n = \frac{5}{2} \cdot n$ (che è intero perchè stiamo supponendo n pari), e che per n abbastanza piccoli, $\frac{5}{2} \cdot n$ non eccede il lato destro della disuguaglianza sopra. A questo punto possiamo sostituire:

$$\frac{r(r-1)}{(n+r)(n+r-1)} = \frac{\left(\frac{5}{2} \cdot n\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot n}{\left(\frac{7}{2} \cdot n\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{25}{2}n^2 - 3n = \frac{49}{2}n^2 - \frac{5}{2}n \Longrightarrow -\frac{1}{2}n - 12n^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n = 6 \Longrightarrow r = 15 \Longrightarrow \text{il numero minimo di calzini è } r + n = 21$$

Nota che il fatto che abbiamo trovato un'equazione che abbia soluzione "accettabile" (intera e positiva) dipende dalla bontà della nostra approssimazione $r \simeq \frac{5}{2} \cdot n$, che è abbastanza accurata da far sì che il valore di n che ci interessa ($n = 6$) appartenga all'insieme degli n tali che $\frac{5}{2} \cdot n < \frac{n}{\sqrt{2}-1} + 1$. In caso contrario (e se volessimo trovare altri numeri di calzini più grandi per cui la probabilità di estrarne due rossi sia $\frac{1}{2}$), avremmo bisogno di approssimazioni migliori. Questo ci porta a un'interessante area della matematica, in particolare della teoria dei numeri, nota come *approssimazione diofantea*. Per maggiori informazioni puoi provare a dare un'occhiata all'ultimo capitolo di queste note del prof. Fontana : `http://www.mat.uniroma3.it/users/fontana/tn1/Cap_3.pdf` o quest'altre: `http://www2.math.ou.edu/~kmartin/nti/chap5.pdf`