Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 1

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO
TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1

(i) $26^4 \cdot 10^3$;

(ii) $26^4 \cdot 10^2 \cdot 5$;

(iii) $2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot 26^2 \cdot 10^2 = 36 \cdot 26^2 \cdot 10^2$;

(iv) $26^2 \cdot 10^2$.

Esercizio 2

(i) $6! = 720$;

(ii) $3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$;

(iii) $4! \cdot 3! = 144$.

Esercizio 3 Sia $E = \{\text{escono esattamente 50 teste}\}$. I casi possibili di 100 lanci di una moneta sono 2^{100}, i casi favorevoli sono $\binom{100}{50}$. Quindi, usando la formula di Stirling

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{per } n \to \infty$$

si ha

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{100}{50}}{2^{100}} = \frac{1}{2^{100}} \cdot \frac{100!}{(50!)^2} \approx \frac{1}{2^{100}} \cdot \frac{2^{100} \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 100}}{(50^{50} \cdot e^{-50} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 50})^2} \approx \frac{10 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{100 \cdot \pi} \approx \frac{\sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{2}}}{10} \approx 0.08.$$

Esercizio 4 Equivale a cercare il numero di soluzioni intere non-negative dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, che sono $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$. Richiedere che ogni scuola riceva almeno una lavagna equivale a cercare il numero di soluzioni intere positive della stessa equazione, che sono $\binom{8-1}{4-1} = 35$.

Esercizio 5 Gli anagrammi sono in tutto $\dfrac{10!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{10!}{16}$.
Poichè le vocali sono 2 e le restanti lettere da permutare sono 9, di cui 3 si ripetono 2 volte (le due consonanti e l'altra vocale), gli anagrammi che iniziano per vocale sono $2 \cdot \dfrac{9!}{2^3} = \dfrac{9!}{4}$.

Esercizio 6 Per spostarsi da A a B, la formica deve fare in tutto 4 passi verso destra, 2 in avanti e 2 in su. Bisogna segliere quali degli 8 passi totali farle fare in ciascuna direzione. Quindi in totale, usando i coefficienti multinomiali, i percorsi possibili sono

$$\binom{8}{4,2,2} = \frac{8!}{4! \cdot 2 \cdot 2} = 420.$$

Imponendo il passaggio per il nodo più grande, il problema viene scomposto in due sottoproblemi analoghi al precedente. Otteniamo quindi

$$\binom{4}{2,1,1} \cdot \binom{4}{2,1,1} = \left(\frac{4!}{2}\right)^2 = 12^2 = 144.$$

In alternativa, si può pensare alle direzioni come a lettere (D, S, A) e ragionare in termini di anagrammi della parola DDDDSSAA.

Esercizio 7 Usando De Morgan,

(a) $E \cap (F \cup G)^c$;

(b) $E \cap G \cap F^c$;

(c) $E \cup F \cup G$;

(d) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$;

(e) $E \cap F \cap G$;

(f) $(E \cup F \cup G)^c$;

(g) $(F \cup G)^c \cup (F \cap (E \cup G)^c) \cup (G \cap (F \cup E)^c)$;

(h) $(E \cap F \cap G)^c$;

(i) $(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap G \cap F^c) \cup (F \cap G \cap E^c)$;

(j) 1.

Esercizio 8

(i) $\dfrac{4 \cdot \binom{51}{2}}{\binom{52}{3}} = \dfrac{4 \cdot \dfrac{50 \cdot 51}{2}}{\dfrac{50 \cdot 51 \cdot 52}{3!}} = \dfrac{2 \cdot 6}{52} = \dfrac{3}{13}$.

(ii) $1 \cdot \dfrac{39}{51} \cdot \dfrac{26}{50} = \dfrac{169}{425}$.

(iii) Passando al complementare, la probabilità richiesta è

$$1 - 1 \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} = 1 - \frac{16 \cdot 22}{17 \cdot 25} = \frac{16 \cdot 22 + 16 \cdot 3 + 25 - 16 \cdot 22}{17 \cdot 25} = \frac{73}{425}.$$

Esercizio 9

- $A = \{$la palla 1 viene prelevata a un'estrazione pari$\}$;
  $B = \{$la palla 8 viene prelevata tra l'ottava e la quindicesima estrazione$\}$;
  $C = \{$ogni palla di numero pari viene prelevata a un'estrazione pari$\}$.

- Poichè $\#A = 7$ e $\#\Omega = 15$, si ha $\mathbb{P}(A) = \dfrac{7}{15}$. Poichè $\#B = 8$ e $\#\Omega = 15$, si ha $\mathbb{P}(B) = \dfrac{8}{15}$. Prendiamo come spazio degli eventi lo spazio di tutte le permutazioni delle 15 palline. I casi favorevoli sono quelle che permutano tra loro rispettivamente le palle pari e quelle dispari. Quindi $\#C = 7! \cdot 8!$ e $\#\Omega = 15!$ e si ha $\mathbb{P}(C) = \dfrac{7! \cdot 8!}{15!} = \binom{15}{7}^{-1}$.