

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 11

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO

TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2012/sol_esonero2_2012.pdf

Esercizio 2 Vedi la soluzione dell'esercizio 3 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame1_030610.pdf

Esercizio 3 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esame3_2013.pdf

Esercizio 4 Vedi la soluzione dell'esercizio 5 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esame4_2013.pdf

Esercizio 5

- (a) Siano X_1, X_2, X_3 esponenziali indipendenti di parametro μ . Abbiamo che $T_1 \sim X_1$, $T_2 \sim X_1 + X_2$, $T_3 \sim X_1 + X_2 + X_3$. Sfruttando le proprietà di forma bilineare della covarianza e l'indipendenza delle X_j otteniamo:

$$\text{Cov}(T_1, T_2) = \text{Cov}(X_1, X_1 + X_2) = \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Var}(X_1) + 0 = \frac{1}{\mu^2}$$

Similmente,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(T_1, T_3) &= \text{Cov}(X_1, X_1 + X_2 + X_3) = \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3) = \\ &= \text{Var}(X_1) + 0 + 0 = \frac{1}{\mu^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{Cov}(T_1, T_3) &= \text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3) = \\ &= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3) + \text{Cov}(X_2, X_1) + \text{Cov}(X_2, X_2) + \text{Cov}(X_2, X_3) = \\ &= \text{Var}(X_1) + 0 + 0 + 0 + \text{Var}(X_2) + 0 = \frac{2}{\mu^2}\end{aligned}$$

- (b) Dato che i T_i sono tempi di arrivo di un processo di Poisson, e quindi $T_i \leq T_{i+1}$, l'evento su cui si sta condizionando, $\{T_2 \leq 8 \leq T_3\}$, è equivalente all'evento $\{T_2 \leq 8\}$, e quindi possiamo scrivere $\mathbb{P}(T_1 > 4 | T_2 \leq 8 \leq T_3) = \mathbb{P}(T_1 > 4 | T_2 \leq 8)$. Ora, se scriviamo, come nella soluzione del punto precedente, $T_1 = X_1$, $T_2 = X_1 + X_2$, $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(\mu)$ indipendenti, abbiamo che (ricordando che T_2 è una Gamma di parametri $(2, \mu)$):

$$\mathbb{P}(T_1 > 4 | T_2 \leq 8) = \frac{\mathbb{P}(4 < X_1 \leq 8, 0 \leq X_2 \leq 8 - X_1)}{\mathbb{P}(T_2 \leq 8)} = \frac{\int_4^8 \int_0^{8-y} \mu^2 e^{-\mu x} e^{-\mu y} dx dy}{\int_0^8 \mu^2 x e^{-\mu x} dx}$$

Calcoliamo separatamente il numeratore e il denominatore:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \int_0^{8-y} \mu^2 e^{-\mu x} e^{-\mu y} dx dy &= \int_4^8 -\mu e^{-\mu y} e^{-\mu x} \Big|_0^{8-y} dy = \int_4^8 (-\mu e^{-8\mu} + \mu e^{-\mu y}) dy = \\ &= -y\mu e^{-8\mu} \Big|_4^8 - e^{-\mu y} \Big|_4^8 = -4\mu e^{-8\mu} - e^{-8\mu} + e^{-4\mu}\end{aligned}$$

$$\int_0^8 \mu^2 x e^{-\mu x} dx = -\mu e^{-\mu x} x \Big|_0^8 + \int_0^8 \mu e^{-\mu x} dx = -8\mu e^{-8\mu} - e^{-\mu x} \Big|_0^8 = -8\mu e^{-8\mu} - e^{-8\mu} + 1$$

Quindi, in conclusione

$$\mathbb{P}(T_1 > 4 | T_2 \leq 8 \leq T_3) = \frac{-4\mu e^{-8\mu} - e^{-8\mu} + e^{-4\mu}}{-8\mu e^{-8\mu} - e^{-8\mu} + 1}$$

- (c) Per far sì che l'evento $\{N_1 = 0, N_4 = 1, N_8 = 2\}$ si verifichi è necessario che non vi siano arrivi fino al tempo 1, ve ne sia esattamente uno tra il tempo 1 e il tempo 4 e esattamente uno tra il tempo 4 e il tempo 8. Il numero di arrivi di un processo di Poisson di intensità μ che si verificano tra due tempi t_1 e t_2 è una variabile di Poisson di parametro $\mu(t_2 - t_1)$. Usando il fatto che gli incrementi di un processo di Poisson sono indipendenti, se $X_1 \sim \text{Poi}(\mu)$, $X_2 \sim \text{Poi}(3\mu)$, $X_3 \sim \text{Poi}(4\mu)$,

$$\mathbb{P}(N_1 = 0, N_4 = 1, N_8 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) = e^{-\mu} 3\mu e^{-3\mu} 4\mu e^{-4\mu} = 12\mu^2 e^{-8\mu}$$

Esercizio 6 Vedi la soluzione dell'esercizio 5 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2011/sol_esame4_2011.pdf

Esercizio 7 Se esistesse una tale variabile aleatoria X tale che $M_X(t) := \mathbb{E}[e^{Xt}] = \frac{e^{-t}}{t+2}$, allora, in particolare, avremmo che $M_X(0) = \frac{1}{2}$. Ma $M_X(0) := \mathbb{E}[e^{X \cdot 0}] = \mathbb{E}[1] = 1 \neq \frac{1}{2}$. Perciò non può esistere alcuna variabile aleatoria avente quella funzione come funzione generatrice dei momenti.

Esercizio 8 Vedi la soluzione dell'esercizio 6 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/sol_esame3_150910.pdf

Esercizio 9 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esonero2_2013.pdf

Esercizio 10 Vedi la soluzione dell'esercizio 3 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2012/sol_esame1_2012.pdf

Esercizio 11 Per i primi tre punti e uno sketch dell'ultimo, vedi la soluzione dell'esercizio 5 all'indirizzo http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2013/sol_esame1_2013.pdf

Vediamo adesso la transizione di fase: sia $\alpha > 0$ una costante; allora, per l'indipendenza delle entrate (e quindi delle righe e delle colonne), abbiamo che

$$\mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} A_{i,j} < \alpha \log(n)\right) = 1 - \left[\mathbb{P}\left(\max_{j=1,\dots,n} A_{i,j} > \alpha \log(n)\right)\right]^n = 1 - [1 - \mathbb{P}(A_{i,j} < \alpha \log(n))^n]^n$$

Poichè $A_{i,j} \sim \text{Exp}(1) \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} A_{i,j} < \alpha \log(n)\right) = 1 - \left[1 - \left(1 - e^{-\alpha \log(n)}\right)^n\right]^n = 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)^n\right]^n$$

Per osservare la transizione di fase, bisogna quindi calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)^n\right]^n\right)$$

per $\alpha < 1$ e per $\alpha = 1$. Se $\alpha = 1$, dobbiamo calcolare $1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^n$. Osserviamo che, poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N$, $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq K < 1$. Quindi, per n grande, abbiamo che

$$0 \leq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^n \leq K^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\min_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, n} A_{i,j} < \log(n) \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right]^n = 1 - 0 = 1$$

Se invece $\alpha < 1, \alpha = 1 - \epsilon$, allora

$$\left(1 - \frac{1}{n^\alpha} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^{n^{1-\epsilon}} \right]^{n^\epsilon}$$

Anche in questo caso possiamo applicare un ragionamento simile al precedente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^{n^{1-\epsilon}} = e^{-1} \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > N, \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^{n^{1-\epsilon}} \leq K < 1$$

da cui, come prima, per n abbastanza grande

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^{n^{1-\epsilon}} \right]^{n^\epsilon} \leq K^{n^\epsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Infine, possiamo inserire la stima ottenuta nell'espressione, e ottenere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - K^{n^\epsilon})^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^n \right]^n \leq 1$$

Tuttavia, sfruttando il binomio di Newton, abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - K^{n^\epsilon})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - nK^{n^\epsilon} + \frac{n(n-1)}{2} K^{2n^\epsilon} - \dots \right) = 1$$

(qui abbiamo usato il fatto che un esponenziale decade a zero più velocemente di qualsiasi potenza, e quindi nel limite sopravvive solo il primo 1 dell'espansione).

In conclusione, per il teorema del confronto, $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}})^n]^n = 1$ e quindi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\min_{i=1, \dots, n} \max_{j=1, \dots, n} A_{i,j} < (1 - \epsilon) \log(n) \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \right)^n \right]^n = 1 - 1 = 0$$