Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

CP110 - Probabilità 1

Soluzioni Tutorato 10

DOCENTE: PROF. PIETRO CAPUTO
TUTORI: SARA CAFFARELLI E DAVIDE MACERA

Esercizio 1 Vedi la soluzione dell'esercizio 6 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2011/sol_esame1_2011.pdf`.

Esercizio 2 Consideriamo l'evento $R := \{\text{il segnale viene ricevuto}\}$. Poichè $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ e tutti i valori che può assumere $Y + Z$ sono contenuti nell'intervallo $[0, 2]$, si ha

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(Y < X < Y + Z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_y^{y+z} \frac{1}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int_0^1 z\mathrm{d}z = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 Vedi la soluzione dell'esercizio 5 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2011/sol_esame3_2011.pdf`.

Esercizio 4 $Z = X + Y \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

$$W = \begin{cases} 0 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \end{cases} \implies W \sim \text{Be}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Z e W non sono indipendenti perché

$$\mathbb{P}(Z = 0, W = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{P}(W = 0).$$

Esercizio 5 $T_1, T_2 \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{15}\right)$ indipendenti. Sia $X := \min\{T_1, T_2\}$. Calcoliamo la funzione di distribuzione di X:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(T_1 > x, T_2 > x) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{15}x}\right)^2 = 1 - e^{-\frac{2}{15}x} \quad \text{per } x > 0.$$

Cioè, $X \sim \text{Exp}\left(\frac{2}{15}\right)$ (in effetti, $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x) = \frac{2}{15}e^{-\frac{2}{15}x}$ per $x > 0$).

(i) $\mathbb{E}[X] = \dfrac{15}{2} = 7.5$, quindi in media dovrò aspettare 7 minuti e mezzo.

(ii) $\mathbb{P}(X < 5) = 1 - e^{-\frac{2}{15}\cdot 5} = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.486$.

Esercizio 6 Vedi la soluzione dell'esercizio 4 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2011/sol_esame1_2011.pdf`.

Esercizio 7 Vedi la soluzione dell'esercizio 3 all'indirizzo `http://www.mat.uniroma3.it/users/caputo/didattica/cp110/2012/sol_esonero2_2012.pdf`.

Esercizio 8

1. Poiché $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, si ha

$$f_Z(z) = f_{X+Y'}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_{Y'}(z-x)\mathrm{d}x = f_X(x) f_Y(x-z)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) e^{-x+z}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x-z)\mathrm{d}x = e^z \int_{\max\{0,z\}}^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x.$$

Quindi

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{e^z}{2} & \text{se } z < 0 \\ \frac{e^{-z}}{2} & \text{se } z > 0 \end{cases} = \frac{e^{-|z|}}{2}.$$

2.

$$F_Z(u) = \mathbb{P}(Z \le u) = \int_{-\infty}^{u} f_Z(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{u} \frac{e^{-|z|}}{2}\mathrm{d}z.$$

Se $u \le 0$, $F_Z(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{u} \frac{e^z}{2}\mathrm{d}z = \frac{e^u}{2}$. Se $u > 0$,

$$F_Z(u) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^z}{2}\mathrm{d}z + \int_{0}^{u} \frac{e^{-z}}{2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-z}\right]_0^u = 1 - \frac{e^{-u}}{2}.$$

Se $t \le 0$, $F_{|Z|}(t) = \mathbb{P}(|Z| \le t) = 0$.
Se $t > 0$, $F_{|Z|}(t) = \mathbb{P}(|Z| \le t) = \mathbb{P}(-t \le Z \le t) = F_Z(t) - F_Z(-t) = 1 - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2} = 1 - e^{-t}$.
Quindi

$$f_{|Z|}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{|Z|}(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}[0,+\infty)(t) \implies |Z| \sim \mathrm{Exp}(1).$$

Esercizio 9

(i) Sia X una normale standard. Calcoliamo la distribuzione e la densità di X^2:

$$F_{X^2}(x) := \mathbb{P}(X^2 < x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

$$f_{X^2}(x) = 2\Phi'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{TFC}}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} \right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) = \frac{(\lambda x)^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

con $\alpha = \lambda = 1/2$; $\Gamma(\alpha) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ossia $X^2 \simeq \mathrm{Gamma}(1/2, 1/2)$. Dato che se

$$Y_1 \simeq \mathrm{Gamma}(\alpha_1, \lambda),\ Y_2 \simeq \mathrm{Gamma}(\alpha_2, \lambda),\ \ldots,\ Y_n \simeq \mathrm{Gamma}(\alpha_n, \lambda)$$

allora

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \simeq \mathrm{Gamma}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \lambda), \text{ da ciò segue che } Z := \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \simeq \mathrm{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e che}$$

$$f_Z(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(ii) Abbiamo già osservato prima che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Inoltre, integrando per parti esattamente come nel caso di n intero, otteniamo la formula ricorsiva

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right) =$$

$$= \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-3}{2}}}\sqrt{\pi}$$

dove con $n!!$ indichiamo il *doppio fattoriale* (o *semifattoriale*) di n, ossia il prodotto di tutti i numeri interi $\leq n$ aventi la stessa parità di n.

(iii) Le coordinate del punto che colpirà il missile sono delle normali standard X_1, X_2, X_3, e per distruggere il bersaglio deve accadere che $\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2} \leq 2$, ossia che $X_1^2+X_2^2+X_3^2 \leq 4$. Se chiamiamo $Z \coloneqq X_1^2+X_2^2+X_3^2$ abbiamo che, per i punti precedenti, Z è una χ^2 con 3 gradi di libertà, quindi

$$\mathbb{P}(Z \leq 4) = \int_{-\infty}^{4} \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^4 e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{x}\Big|_0^4 + 2\int_0^4 e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right) \overset{\sqrt{x}=t}{=} -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}e^{-2} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}}e^{-2} + 2(\Phi(2)-\Phi(0)) \simeq -0.216 + 2\cdot(0.9772-0.5) = 0.7384.$$