Università degli Studi Roma Tre a.a 2012/2013
CP110 - Calcolo delle Probabilità
Tutorato 7 del 26 Aprile 2013
Tutore: Andrea Gullotto e Mirko Moscatelli

"In strutture matematiche perfettamente costruite, i matematici trovano lo stesso tipo di bellezza che altri trovano in brani musicali incantevoli, o in architetture magnifiche."

Esercizio 1. Lanciamo uno dopo l'altro due dadi bilanciati.
Si determini la densità congiunta delle variabili X ed Y quando:

1. X è il più grande valore e Y la somma dei valori
2. X è il valore del primo dado e Y è il più grande dei due valori
3. X è il più piccolo e Y il più grande valore dei dadi

Esercizio 2. Le variabili aleatorie X e Y hanno densità congiunta:

$$f(x, y) = 12xy(1 - x) \qquad 0 < x < 1,\, 0 < y < 1$$

- X e Y sono indipendenti?
- Si determini $\mathbb{E}[X]$.
- Si determini $\mathbb{E}[Y]$.
- Si determini $Var[X]$.
- Si determini $Var[Y]$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \qquad y \in \mathbb{R}^+ \; x \in [-y, y]$$

- Trovare c affinchè f sia una densità.
- Calcolare le marginali.
- Calcolare $E[X]$.

Esercizio 4. Un'urna contiene 5 palline bianche e 8 rosse. Estraiamo 3 palline senza reinserimento.
Sia X_i uguale a 1 se la i-esima pallina estratta è bianca e sia uguale a 0 altrimenti. Si determini la densità congiunta di:

- X_1, X_2
- X_1, X_2, X_3

Ripetere l'esercizio quando le palline vengono reinserite nell'urna.

Esercizio 5. La densità congiunta di X e Y è data da:

$$f(x, y) = e^{-(x+y)},\ 0 \leq x \leq \infty,\ 0 \leq y \leq \infty$$

1. Dire se X e Y sono indipendenti.
2. Calcolare $\mathbb{P}(X < Y)$
3. Calcolare $\mathbb{P}(X < a)$

Esercizio 6. Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x) = \begin{cases} cx^2y^2 & 1 \geq y \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Calcolare c.
- Dire se X e Y sono indipendenti.
- Calcolare il valore atteso di $Y - X$

Esercizio 7. Consideriamo un settimanale di annunci a pagamento in cui ci siano m pagine, con m molto grande. Supponiamo che il numero di annunci per pagina sia variabile e che l'unico modo che abbiamo per determinarne il numero sia di contarli. Inoltre, supponiamo che ci siano troppe pagine perché sia possibile contare tutti gli annunci che compaiono sul settimanale, e che il vostro scopo sia di scegliere un annuncio in modo equiprobabile, cioè in modo tale che ognuno di loro abbia la medesima probabilità di essere scelto.

a) Se scegliete a caso una pagina e quindi scegliete a caso un annuncio da questa pagina, avrete ottenuto lo scopo? Perchè o perchè no?

Denotiamo ora con n_i il numero di annunci presente nella pagina $i = 1, \ldots, m$ e supponiamo che, mentre il loro numero è ignoto, essi siano in numero minore o uguale a n.
Si consideri il seguente procedimento per scegliere un annuncio:
Passo 1. Si scelga a caso una pagina. Supponiamo sia la pagina X. Si determini $n(X)$ contando il numero di annunci della pagina X.
Passo 2. Si accetta la pagina X con probabilità pari a $\frac{n(X)}{n}$. Se la si accetta si va al passo 3, altrimenti si torna al passo 1.
Passo 3. Si sceglie a caso un annuncio dalla pagina X.
Si definisca ogni passaggio dal passo 1 una iterazione.

b) Qual è la probabilità che una singola iterazione del procedimento porti ad accettare un annuncio della pagina i?

c) Qual è la probabilità che una singola iterazione del procedimento porti ad accettare un annuncio?

d) Qual è la probabilità che il procedimento necessiti di k iterazioni prima di accettare un annuncio e che venga scelto l'annuncio j della pagina i?

e) Qual è la probabilità che l'annuncio j della pagina i sia quello prescelto?

f) Qual è il numero atteso di iterazioni che il procedimento richiederà?