

Università degli Studi Roma Tre a.a 2012/2013
CP110 - Calcolo delle Probabilità
Tutorato 4 del 22 Marzo 2013
Tutore: Andrea Gullotto e Mirko Moscatelli

“I grandi artisti hanno probabilità nel loro talento e del talento nella loro probabilità.”

Esercizio 1 (Esercizi Teorici).

- Si esprima $\mathbb{P}(X \geq a)$ in funzione della funzione di distribuzione di X .
- Se X ha funzione di distribuzione F_X , qual è la funzione di distribuzione di e^X ?
- Se X ha funzione di distribuzione F_X , qual è la funzione di distribuzione di $aX + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)?

Esercizio 2. Sia n il tuo numero preferito tra 1 e 10.

Un dado equo a dieci facce viene lanciato fintanto che non viene la faccia n . Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci.

Calcolare $\mathbb{P}(X = k)$.

Esercizio 3. Si considerino lanci indipendenti di un dado equo a sei facce.

Sia X il numero di lanci necessari per ottenere la prima faccia pari e sia Y il numero di lanci necessari per ottenere la prima faccia maggiore di 3. Trovare:

- $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{P}(X > 2)$
- $\mathbb{P}(X > 2|Y = 2)$
- $\mathbb{P}(X = Y)$

Esercizio 4. Quando tre amici vanno a prendere il caffè insieme, decidono chi pagherà lanciando ognuno una moneta e facendo pagare chi ottiene una faccia diversa dagli altri due. Se tutti e tre ottengono la stessa faccia, fanno un secondo lancio e così via fino alla prima volta che non tutte le monete saranno uguali. Qual è la probabilità che:

- Vengano lanciate le monete esattamente 3 volte?
- Siano necessari più di 4 lanci?

Esercizio 5. Giocate una serie di partite e avete probabilità p di vincere ognuna. Avete programmato di giocare 5, ma se vincete la quinta continuate a giocare finché non perdetevi.

- Si trovi il numero atteso di partite che giocherete.
- Si trovi il numero atteso di partite che perderete.

Esercizio 6. Sia X una variabile di Poisson di parametro λ .

- Che valore di λ massimizza $\mathbb{P}(X = k)$, $k \geq 0$?
- Si mostri che $\mathbb{E}[X^n] = \lambda \mathbb{E}[(X + 1)^{n-1}]$ ed utilizzare questo risultato per calcolare $\mathbb{E}[X^3]$

Esercizio 7. Si consideri la passeggiata aleatoria con probabilità p di spostarsi a destra e probabilità $1 - p$ di spostarsi a sinistra.

Sia S_n la posizione dopo n passi, con posizione iniziale $S_0 = 0$.

- Calcolare il valore atteso e la varianza di S_n .
- Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $X = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$.