Università degli Studi Roma Tre a.a 2011/2012
CP110 - Calcolo delle Probabilità
Tutorato 4 del 22 Marzo 2012
Tutore: Andrea Gullotto

Esercizio 1. Si considerino lanci indipendenti di un dado equo a sei facce. Sia X il numero di lanci necessari per ottenere la prima faccia pari e sia Y il numero di lanci necessari per ottenere la prima faccia maggiore di 3. Trovare:

- $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{P}(X > 2)$
- $\mathbb{P}(X > 2|Y = 2)$
- $\mathbb{P}(X = Y)$

Esercizio 2. La probabilità che una persona ospite di un ristorante sia soddisfatta del pasto è $p \in (0, 1)$.
Si intervistano n persone a caso fuori dal ristorante. Sia Y la variabile casuale che indica il numero di persone soddifatte tra le n intervistate.
Calcolare la $P(Y = m)$ con $0 \le m \le n$.

Esercizio 3. Sia n il tuo numero preferito compreso tra 1 e 10.
Un dado equo a dieci facce viene lanciato fintanto che non viene la faccia n.
Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di lanci.
Calcolare $P(X = k)$.

Esercizio 4. Un'urna contiene 112 dadi a 6 facce di cui 56 equi e 56 truccati. Nei dadi truccati la faccia 1 esce con probabilità $\frac{1}{2}$ e le altre facce con probabilità $\frac{1}{10}$. Si estrae a caso un dado, se X è la variabile aleatoria che indica il risultato del lancio, calcolare $P(X = 3)$, $P(X = 1)$ e $P(X = 5)$.
Se il dado estratto viene lanciato due volte ed indico con X_i il risultato del lancio i-esimo, $i \in \{1, 2\}$, calcolare la probabilità che il dado sia truccato sapendo che $X_1 = 2$ e $X_2 = 3$.

Esercizio 5. In un'urna ci sono in proporzione p palline rosse.
Estraggo con rimbussolamento n palline e riempio una seconda urna con delle copie delle palle estratte.
Dimostrare che nella seconda urna la probabilità di pescare una rossa è ancora p.
Calcolare poi la probabilità che nella seconda urna ci siano k palle rosse sapendo che ne ho estratta una rossa.

Esercizio 6. Si consideri la passeggiata aleatoria con probabilità p di spostarsi a destra e probabilità $1 - p$ di spostarsi a sinistra.
Sia S_n la posizione dopo n passi, con posizione iniziale $S_0 = 0$.

- Calcolare il valore atteso e la varianza di S_n
- Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $X = (\frac{1-p}{p})^{S_n}$

Esercizio 7. n persone vanno a cena. Diciamo che la cena è k-bilanciata se in ogni sottoinsieme di k persone tra le n ci sono almeno due persone che si conoscono tra loro e almeno due persone che non si conoscono tra loro. È noto che non è possibile organizzare una cena tra 6 persone che sia 3-bilanciata. Utilizzare il metodo probabilistico per dimostrare che invece è possibile organizzare una cena tra 6 persone che sia 4-bilanciata.