Università degli Studi Roma Tre a.a 2011/2012
CP110 - Calcolo delle Probabilità
Tutorato 12 del 24 Maggio 2012
Tutore: Andrea Gullotto

Esercizio 1. Le variabili aleatorie X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(y-x) & 1 \geq y \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Dire se X e Y sono indipendenti.
- Calcolare i valori medi $E[X]$ e $E[Y]$.
- Calcolare la $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Esercizio 2. Un dado è lanciato 100 volte.
Sia X_i il valore del dado all'i-esimo lancio.
Sia $Y_i = 0$ se X_i è dispari e $Y_i = \frac{1}{2}X_i$ se X_i è pari. Sia $S = \sum_{i=1}^{100} Y_i$.

- Calcolare la varianza di S.
- Trovare un valore approssimato per la probabilità dell'evento $S \geq 100$.

Esercizio 3. Il tempo di vita di un dispositivo elettronico è una variabile esponenziale di parametro 1. Si considerino ora n dispositivi indipendenti e sia M_n il primo tempo in cui non si ha più alcun dispositivo funzionante.

1. Calcolare la funzione di distribuzione di M_n.
2. Calcolare $\mathbb{P}(M_n > \log n)$ nel limite $n \to \infty$.

Esercizio 4. Siano X, Y, Z tre variabili di Poisson indipendenti di parametri 1, 2, 3 rispettivamente. Calcolare

- $\mathbb{P}(X+Y+Z=6)$
- $\mathrm{Cov}(X+2Y, 2Y+3Z)$
- $E[XYZ]$
- $E[X^2Y^2Z]$

Esercizio 5. Si considerino n lanci indipendenti di una moneta equa e siano $X_1, \ldots, X_n$ con $X_i \in \{0,1\}$ i risultati dei lanci (1 per testa e 0 per croce). Sapendo che il numero totale di teste è k, dove $0 \leq k \leq n$ è un intero assegnato, trovare:

- la probabilità che $X_1 = 1$
- la densità congiunta di X_1, X_2.
- la covarianza di X_1, X_2.

Esercizio 6. Siano $Z_1, \ldots, Z_n$ copie indipendenti della variabili esponenziale di parametro 2, e sia

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

- Fornire un valore approssimato (per n grandi) della probabilità dell'evento $\{X_n \geq \frac{n}{2}\}$
- Determinare la densità di probabilità di X_n, per ogni n.

Esercizio 7. Sia $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$, dove $X_1, \ldots, X_n$ sono variabili indipendenti con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Si consideri la probabilità dell'evento $\{\overline{X_n} < 0.51\}$ al variare di n.

a Cosa permette di concludere la legge dei grandi numeri per grandi valori di n?

b Si determini approssimativamente per quale valore di n questa probabilità vale circa 0.84.

Esercizio 8. Sia Q un punto scelto a caso uniformemente in un quadrato di lato 1, e sia D la distanza di Q dal centro del quadrato. Calcolare il valor medio di D^2.

Esercizio 9. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme in [0,1]. Sia Y_n la variabile aleatoria

$$Y_n = \min X_1, \ldots, X_n$$

- Si determini il valor medio e la varianza di Y_n in funzione di n
- Si dimostri che la variabile $T_n = nY_n$ converge in distribuzione a una variabile esponenziale di parametro 1, ossia che per ogni $t > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) \to 1 - \exp -t$$

Esercizio 10. Siano X, Y due variabili aleatorie continue con densità congiunta

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp -x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2, \quad x, y \in (-\infty, +\infty)$$

- Calcolare le densità marginali di X e Y e i loro valori attesi.
- Dire se X, Y sono indipendenti.